等速円運動

・等速円運動：一定の速さで円上を回る運動

・速さは変わらないが，向きが変わる

・中心方向に向かって加速する

・中心方向に力がはたらいている

力の形は？

物体にはたらいている力

ニュートンの第2法則（運動方程式）　$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$

加速度

速度

位置

ラジアン（rad）

5・29

- 円の半径と弧の長さの比で表した角度

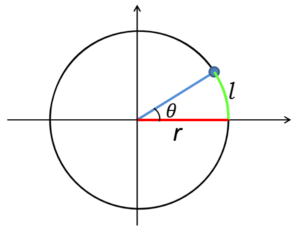
$\theta = \frac{l}{r}$

- $r:l$＝1:1のとき　1rad

360°　＝2π rad

180°　＝π rad

90°　＝π/2 rad



回転の速さ（角速度ω）

- 角速度ω〔rad/s〕→単位時間当たり何rad（ラジアン）回転するか

弧度法：$\theta = \frac{l}{r}$〔rad〕

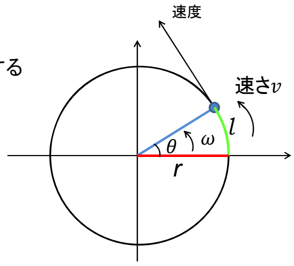
Δt〔s〕の間に$\Delta\theta$〔rad〕回転したとする（弧の長さlとする。）

$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ ➡ $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

（平均）　（瞬間）

等速円運動：速さv〔m/s〕一定（ω =一定）

$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\Delta l}{r\Delta t} = \frac{v}{r}$ ➡ $\boxed{v = r\omega}$



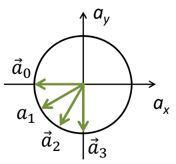
$t = 0$で$\theta = \theta_0$とすると

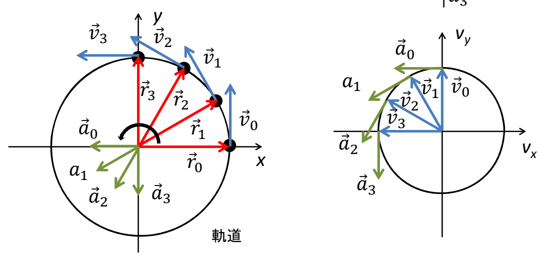
$\boxed{\theta = \omega t + \theta_0}$

等速円運動とベクトル

$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$　：速度の方向は軌道の接線方向

$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$



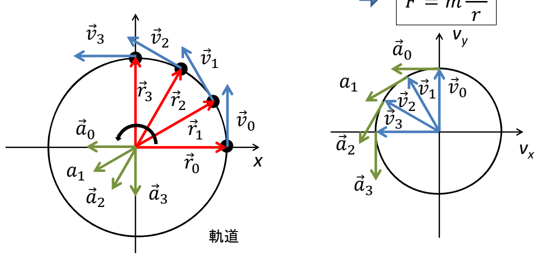


加速度ベクトルは円の中心を向いている　$\vec{F} = m\vec{a}$
（力は中心を向いている　：　向心力　）

速度ベクトルの大きさ　$\boxed{v = r\omega}$

加速度ベクトルの大きさ　$\boxed{a = v\omega = r\omega^2}$ ➡ $\boxed{F = ma = mr\omega^2}$

➡ $\boxed{F = m\frac{v^2}{r}}$

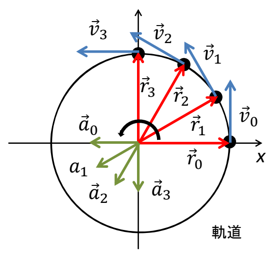


加速度ベクトルは円の中心を向いている　$\vec{F} = m\vec{a}$
（力は中心を向いている　：　向心力　）

速度ベクトルの大きさ　$\boxed{v = r\omega}$

加速度ベクトルの大きさ　$\boxed{a = v\omega = r\omega^2}$ ➡ $\boxed{F = ma = mr\omega^2}$

➡ $\boxed{F = m\frac{v^2}{r}}$



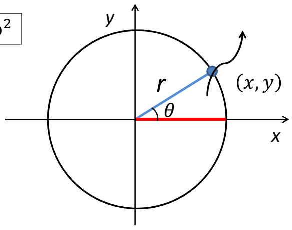
円運動では必ずこの大きさの力が中心方向にはたらいている。

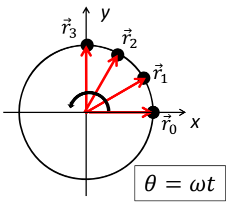
微分で　$v = r\omega$　$a = v\omega = r\omega^2$

極座標

$x = r\cos\theta$ ➡ $x = r\cos(\omega t)$

$y = r\sin\theta$ 　 $y = r\sin(\omega t)$





$\theta = \omega t$

微分で　$v = r\omega$　$a = v\omega = r\omega^2$

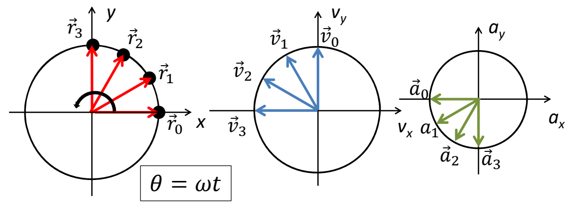
極座標

$x = r\cos\theta$ ➡ $x = r\cos(\omega t)$ 微分➡ $v_x = -r\omega\sin(\omega t)$

$y = r\sin\theta$ 　 $y = r\sin(\omega t)$ 　 $v_y = r\omega\cos(\omega t)$

微分➡ $a_x = -r\omega^2\cos(\omega t)$

$a_y = -r\omega^2\sin(\omega t)$



$\theta = \omega t$

微分で　$v = r\omega$　$a = v\omega = r\omega^2$

極座標

$x = r\cos\theta$ ➡ $x = r\cos(\omega t)$ 微分➡ $v_x = -r\omega\sin(\omega t)$

$y = r\sin\theta$ 　 $y = r\sin(\omega t)$ 　 $v_y = r\omega\cos(\omega t)$

微分➡ $a_x = -r\omega^2\cos(\omega t)$

$a_y = -r\omega^2\sin(\omega t)$

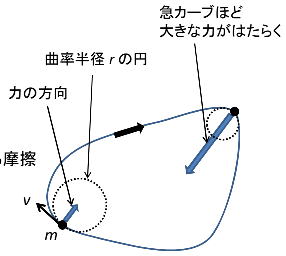
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{r^2\omega^2\left(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right)} = r\omega$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{r^2\omega^4\left(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right)} = r\omega^2$$

曲線上の運動（等速円運動の一般化）

曲線の内側に向かって力がはたらいている。

力の大きさ：$F = m\dfrac{v^2}{r}$



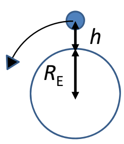
例：
車がカーブを曲がるとき、タイヤの受ける摩擦力がカーブの内側にはたらいている

例

地球の半径をR_E〔m〕、地球の質量をM_E〔kg〕、万有引力定数をG〔N・m²kg⁻²〕とする。高度h〔m〕を等速円運動で周回する人工衛星を考える。この人工衛星の速さv〔m/s〕を求めよ。

人工衛星の質量をmとすると　　$F = m\dfrac{v^2}{r}$

$$\underbrace{m\frac{v^2}{R_E + h}}_{\text{向心力}} = \underbrace{G\frac{mM_E}{(R_E + h)^2}}_{\text{万有引力}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_E}{R_E + h}}$$

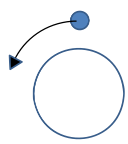


例

地球の半径をR_E〔m〕、地球の質量をM_E〔kg〕、万有引力定数をG〔N・m²kg⁻²〕とする。高度h〔m〕を等速円運動で周回する人工衛星を考える。この人工衛星の速さv〔m/s〕を求めよ。

人工衛星の質量をmとすると　　$F = m\dfrac{v^2}{r}$

$$m\frac{v^2}{R_E + h} = G\frac{mM_E}{(R_E + h)^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_E}{R_E + h}}$$



ちなみに

$h = 0$で　$v = \sqrt{\dfrac{GM_E}{R_E}} = \sqrt{gR_E}$

（第一宇宙速度）

例

地球の半径をR_E〔m〕、地球の質量をM_E〔kg〕、万有引力定数をG〔N・m^{2}kg^{-2}〕とする。高度h〔m〕を等速円運動で周回する人工衛星を考える。この人工衛星の速さv〔m/s〕を求めよ。

$$F = m\frac{v^2}{r}$$

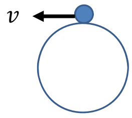
人工衛星の質量をmとすると

$$m\frac{v^2}{R_E + h} = G\frac{mM_E}{(R_E + h)^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_E}{R_E + h}}$$

ちなみに

$h = 0$で　$v = \sqrt{\frac{GM_E}{R_E}} = \sqrt{gR_E}$

（第一宇宙速度）



問15

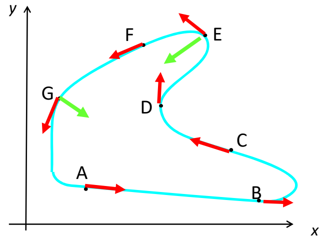
図のようなサーキットを一定の速さで車が走っている．B点，E点での速度ベクトルが描いてある．

(1) 他の地点での速度ベクトルの向きを描きなさい．

(2) E点，G点で車に働く向心力の向きを描きなさい．

速度ベクトルは軌跡の接線の向き

力の合力の向き＝加速度ベクトルの向き＝カーブの内側に向く



問15

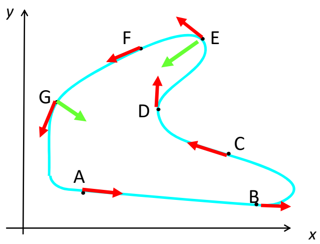
(3) E点で車に働く向心力と，G点での向心力はどちらが大きいか．

$$F = m\frac{v^2}{r}$$

E点

(4) 車にはたらく力の合力が0の区間は？

AB間



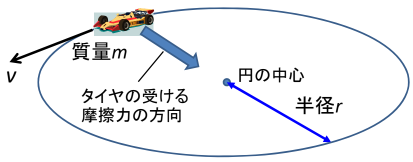
問16

重要

質量1000kgの車が一定の速さ30m/s（108km/h）で（曲率）半径200mのカーブを曲がっている．

(1) このときタイヤと路面との間の（中心方向の）摩擦力の大きさは何Nか．

$$F = m\frac{v^2}{r} = 1000 \times \frac{(30)^2}{200} = 4500 = 4.5 \times 10^3 \text{ N}$$



問16

6/5

(2) 路面が雨に濡れてタイヤと路面との最大静止摩擦係数が小さくなるとタイヤはスリップする．この場合静止摩擦係数がいくつになるとタイヤがスリップするか計算せよ．

最大摩擦力：　$F = \mu N$　　（N：垂直抗力）

向心力　$= m\frac{v^2}{r}$

$$\mu N < m\frac{v^2}{r} \Rightarrow \mu mg \le m\frac{v^2}{r}$$

$\mu \times 1000 \times 9.8 < 4500$

$\mu < 0.459$

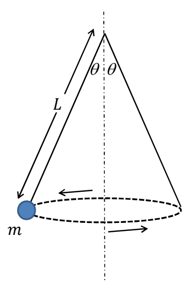
静止摩擦係数が0.46より小さくなるとスリップする

重要

問17　図のように、軽い糸の端に質量mのおもりをつけて長さLの振り子にして、おもりを水平面内で等速円運動をさせる（円錐振り子）。糸が鉛直線となす角をθとして次の問に答えよ。
ただし、重力加速度をgとする。

（1）糸がおもりを引く力の大きさTはいくらか

（2）おもりの速さを求めよ

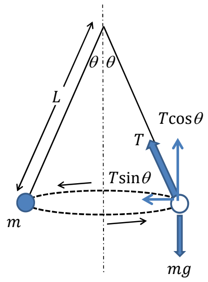


重要

問17　図のように、軽い糸の端に質量mのおもりをつけて長さLの振り子にして、おもりを水平面内で等速円運動をさせる（円錐振り子）。糸が鉛直線となす角をθとして次の問に答えよ。
ただし、重力加速度をgとする。

（1）糸がおもりを引く力の大きさTはいくらか

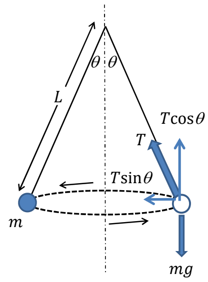
$$\begin{cases} m\dfrac{v^2}{r} = T\sin\theta \\ mg = T\cos\theta \end{cases} \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\theta}$$



重要

問17　図のように、軽い糸の端に質量mのおもりをつけて長さLの振り子にして、おもりを水平面内で等速円運動をさせる（円錐振り子）。糸が鉛直線となす角をθとして次の問に答えよ。
ただし、重力加速度をgとする。

$$\begin{cases} m\dfrac{v^2}{r} = T\sin\theta \\ mg = T\cos\theta \end{cases} \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\theta}$$



重要

問17　図のように、軽い糸の端に質量mのおもりをつけて長さLの振り子にして、おもりを水平面内で等速円運動をさせる（円錐振り子）。糸が鉛直線となす角をθとして次の問に答えよ。
ただし、重力加速度をgとする。

（2）おもりの速さを求めよ

$(r = L\sin\theta)$

$$\begin{cases} m\dfrac{v^2}{r} = T\sin\theta \\ mg = T\cos\theta \end{cases} \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

$$v^2 = \frac{rT\sin\theta}{m} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{rg\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{Lg\sin^2\theta}{\cos\theta}}$$