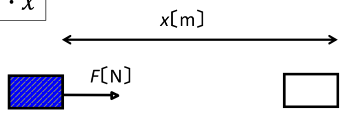
仕事とエネルギー

- 仕事
- 位置エネルギー
- 運動エネルギー
- 力学的エネルギー保存則

仕事

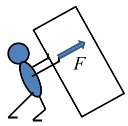
- 力を加えて物体を動かす
  物体に対して仕事をする
  物体は仕事をされる
- 仕事＝力×力を作用させた距離

$$\boxed{W = F \cdot x}$$

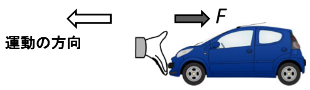


仕事の単位　J（ジュール）（=〔N・m〕）
物体に1〔N〕の力を加え1〔m〕動かしたときの仕事＝1〔J〕

仕事　$\boxed{W = F \cdot x}$

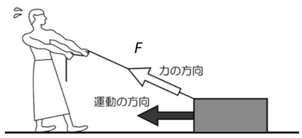


物体が移動しなければ
仕事をしたことにならない。

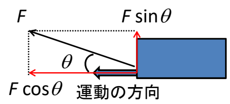


力の向きと動いた向きが逆の場合は、
物体に対して負の仕事をした。
（物体から仕事をされた。）

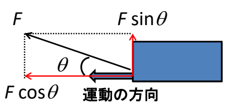
力の向きと移動方向



仕事＝力の 運動方向成分×力を作用させた距離

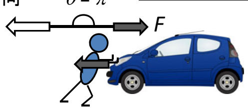


物体がなされる仕事（物体に対してした仕事）: $W=F\ x\ \cos\theta$



物体がなされる仕事（物体に対してした仕事）: $W=F\ x\ \cos\theta$

力の向きと動いた向きが逆の場合は、
物体に対して負の仕事をした。
（物体から正の仕事をされた。）



$W=F\ x\ \cos\theta=F\ x\ \cos\pi = -F\ x$

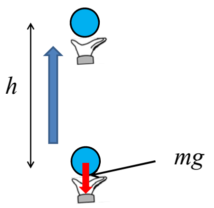
例１

質量5.0kgの物体を、水平面に沿って大きさ6.0Nの
水平な力で10m引く。このカがする仕事は（　60　）J である。

$6.0 \times 10 = 60$〔J〕

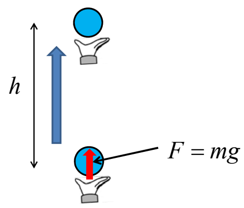
例2

重力に逆らって質量m〔kg〕の物体をh〔m〕持ち上げる



例2

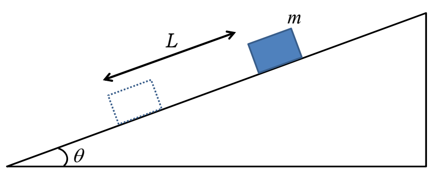
重力に逆らって質量m〔kg〕の物体をh〔m〕持ち上げる



仕事　W

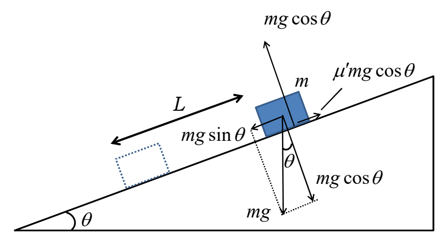
$$W = F \cdot h = mgh$$

例3



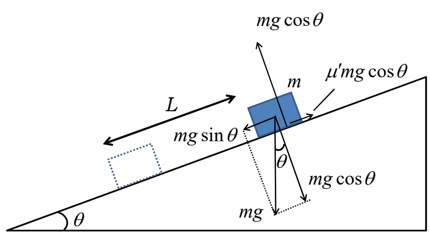
水平面に対してθの角度をなすあらい斜面にそって，質量m〔kg〕の物体が距離L〔m〕だけすべり下りる。重力加速度をg〔m/s^2〕，動摩擦係数をμ'として重力，斜面からの垂直抗力，斜面からの摩擦力が物体にする仕事を求めよ。

例3



水平面に対してθの角度をなすあらい斜面にそって，質量m〔kg〕の物体が距離L〔m〕だけすべり下りる。重力加速度をg〔m/s^2〕，動摩擦係数をμ'として重力，斜面からの垂直抗力，斜面からの摩擦力が物体にする仕事を求めよ。

例3



重力：　$mgL\sin\theta$

垂直抗力：　0

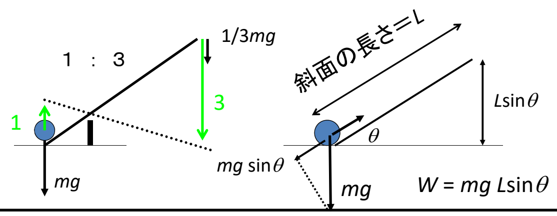
摩擦力：$-\mu' mgL\cos\theta$

仕事の原理

てこや斜面を使って仕事をするとき，

→　力は小さくてすむが、移動距離は大きい

→　要する仕事は同じ



問26 以下の質問に答えよ

(1). 図(a)において，親子で力を合わせて物体をx〔m〕動かした．どちらのした仕事が大きいか．また，二人のした仕事はそれぞれいくらか．

父のした仕事＝F_1x 〔J〕

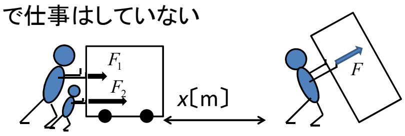
子のした仕事＝F_2x 〔J〕 $F_1<F_2$ だから子供

車のされた仕事＝$(F_1+F_2)x$ 〔J〕

(2). 図(b)では，人が倒れかけたタンスを支えている．人は仕事をしているだろうか．

移動していないので仕事はしていない

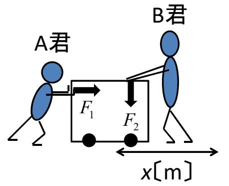
$F\times0=0$ 〔J〕



(3). A君とB君が図(c)のように物体に力を加えている．物体がx〔m〕動いたとき，誰がどれほどの仕事をしたか．

A君のした仕事＝F_1x 〔J〕

B君のした仕事＝$F_2\times0=0$ 〔J〕



(4). A君とB君が図(d)のように物体に力を加え，物体はx〔m〕動いた．

A君は物体に対し仕事をしたか．

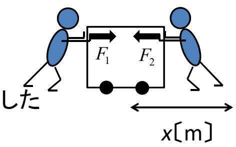
B君は物体に仕事をしたか．

A君のした仕事＝F_1x 〔J〕

B君のされた仕事＝F_2x 〔J〕

車はA君から仕事をされB君に仕事をした

(B君のした仕事＝$-F_2x$)



エネルギーと仕事

エネルギー：仕事をするとその分だけ減少する物理量

仕事をされるとその分だけ増大する物理量

(=負の仕事をすると)

状態A (エネルギーE_A) → 状態B (エネルギーE_B)

仕事W

$$\boxed{E_B = E_A - W}$$

エネルギーと仕事

エネルギー：仕事をするとその分だけ減少する物理量

仕事をされるとその分だけ増大する物理量

(=負の仕事をすると)

状態A (エネルギーE_A) → 状態B (エネルギーE_B)

仕事W

$$\boxed{E_B = E_A + W}$$

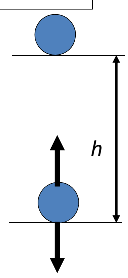
重力の位置エネルギー

“地表”からh〔m〕の高さにあるm〔kg〕の物体は”地表”に対して**mgh**〔J〕だけ大きな位置エネルギーを持つ

重力 mg〔N〕に逆らってh〔m〕の高さ持ち上げるのに要する仕事＝mgh〔J〕

物体の位置エネルギーとして蓄えられている

※ h〔m〕落下したとき，重力のする仕事mgh〔J〕



例

摩擦が無視できる斜面(水平と30°)に沿って1000kgの車を，元の位置から10m高い位置まで引き上げた。引き上げるに要した仕事は何Jか，また，車の位置エネルギーの増加は何Jか．

$W = Fx$

$F = mg\sin 30° = 4900$

$x = \dfrac{10}{\sin 30°} = 20$

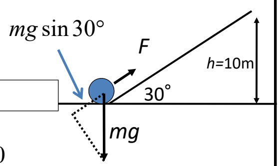
$W = 4900 \times 20 = 98000$

$\boxed{9.8\times10^4\text{J}}$

$E = mgh = 1000 \times 9.8 \times 10 = 98000$

$\boxed{9.8\times10^4\text{J}}$

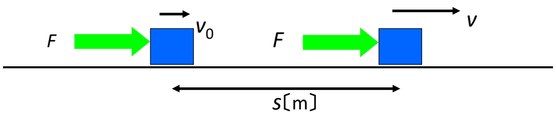
斜面の長さ＝x



運動エネルギー

- 力をある距離だけ加え続ける＝仕事をする
- 仕事の分だけ変化する量＝運動エネルギー

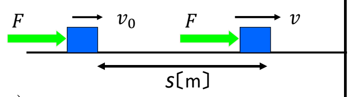
$$Fs = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0{}^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{K = \frac{1}{2}mv^2}$$



仕事と運動エネルギー

○ 7・30

- 一定の力 F〔N〕でt 秒間加速後の速度v〔m/s〕



$$\begin{cases} a = F/m \\ v = at + v_0 \end{cases} \text{より}$$

$$v = \frac{F}{m}t + v_0 \rightarrow t = \frac{m}{F}(v - v_0)$$

代入

$$s = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 + v_0 t \longrightarrow s = \frac{1}{2}\frac{F}{m}\left(\frac{m}{F}(v - v_0)\right)^2 + v_0\frac{m}{F}(v - v_0)$$

$$\left(s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t\right) \longrightarrow s = \frac{1}{2}\frac{m}{F}(v - v_0)^2 + \frac{m}{F}\left(v \cdot v_0 - v_0{}^2\right)$$

$$\longrightarrow Fs = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0{}^2 \qquad \boxed{K = \frac{1}{2}mv^2}$$

問a

地表から高さ150 m のビルの上にある質量2.00 kg の物体の位置エネルギーは（　　　）J である。ただし、位置エネルギーの基準点を地表とし、重力加速度の大きさを9.80m/s²とする。

“地表”からh〔m〕の高さにあるm〔kg〕の物体は”地表”に対して **mgh**〔J〕だけ大きな位置エネルギーを持つ

問b

速さ4.0 m/sで飛んでいる質量5.0 kgの物体のもつ運動エネルギーは（　　　）J である。

速さvで運動する質量mの物体の運動エネルギーは：$\frac{1}{2}mv^2$

問a

地表から高さ150 m のビルの上にある質量2.00 kg の物体の位置エネルギーは（ 2940 ）J である。ただし、位置エネルギーの基準点を地表とし、重力加速度の大きさを9.80m/s²とする。

“地表”からh〔m〕の高さにあるm〔kg〕の物体は”地表”に対して **mgh**〔J〕だけ大きな位置エネルギーを持つ

$$mgh = 2.0\text{kg} \times 9.8\text{m/s}^2 \times 150\text{m} = 2940\text{J}$$

問b

速さ4.0 m/sで飛んでいる質量5.0 kgの物体のもつ運動エネルギーは（ 40 ）J である。

速さvで運動する質量mの物体の運動エネルギーは：$\frac{1}{2}mv^2$

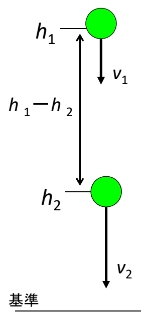
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 5.0 \times 4.0^2 = 40\text{J}$$

重力のする仕事と運動エネルギー

- 物体が重力で落下している

h_1からh_2までの間に物体が重力によってされた仕事＝$mg(h_1 - h_2)$

＝ 運動エネルギーの増加



$$mg(h_1 - h_2) = \frac{1}{2}m v_2{}^2 - \frac{1}{2}m v_1{}^2$$

$$mgh_1 + \frac{1}{2}m v_1{}^2 = mgh_2 + \frac{1}{2}m v_2{}^2$$

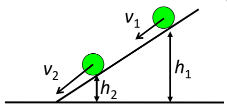
力学的エネルギー保存の法則

$$mgh_1 + \frac{1}{2}m v_1^2 = mgh_2 + \frac{1}{2}m v_2^2$$

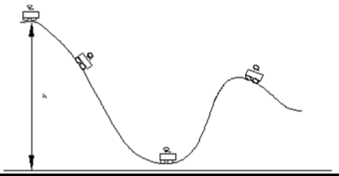
- 力学的エネルギー
  ＝（重力の位置エネルギー）＋(運動エネルギー)
  ＝ 一定
- 重力のみが働く落下運動(自由落下，斜面)において力学的エネルギーは常に一定

力学的エネルギー保存

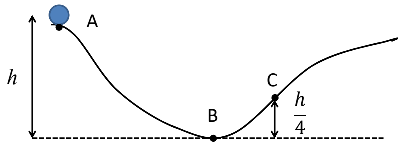
$$mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$



下り坂：位置エネルギーが減る→運動エネルギーが増す
上り坂：位置エネルギーが増す→運動エネルギーが減る



問27　重要？



v_A =0　の時、　v_B 、v_C　は？

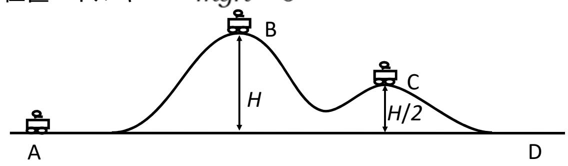
$$\frac{1}{2}m \times 0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 + mg \times 0 = \frac{1}{2}mv_C^2 + mg\frac{h}{4}$$

$$\Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2gh} \qquad v_C = \sqrt{\frac{3gh}{2}}$$

問28　力学的エネルギーの保存　重要？

A地点：
運動エネルギー＝ $\frac{1}{2}mv_0^2$
位置エネルギー＝ $mgh = 0$

A地点での重力による位置エネルギーを0とする

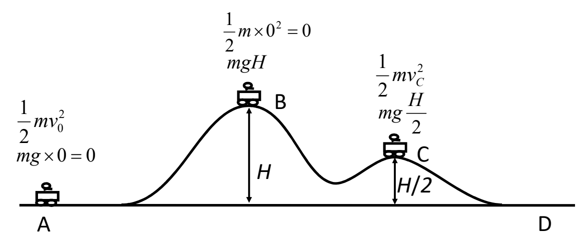


B地点：
運動エネルギー＝　0
位置エネルギー＝　*mgH*

問28　力学的エネルギーの保存

図のような抵抗などは無視できるジェットコースターがある．A地点を速さv_0〔m/s〕でスタートし，高さH〔m〕のB地点を乗り越えるのに必要な速さを力学的エネルギーの保存則から求める．ジェットコースターの質量をmとすると，A地点での運動エネルギーは $\boxed{\frac{1}{2}mv_0^2}$ である．B地点での速度を0として，B地点での運動エネルギーは $\boxed{0}$ ，位置エネルギーは $\boxed{mgH}$ である．

問28　力学的エネルギーの保存



$\boxed{\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = mgH + 0}$ ⇒ $v_0 = ?$

$\boxed{\frac{1}{2}mv_C^2 + mg\frac{H}{2} = mgH}$ ⇒ $v_C = ?$

問28　力学的エネルギーの保存

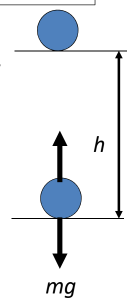
力学的エネルギーの保存則から，A地点での速さv_0をg，Hで表すと$\boxed{\sqrt{2gH}}$である．また，同様に考えるとA地点から$H/2$だけ高いC地点での速さは$\boxed{\sqrt{gH}}$でありA地点での速さの$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$倍である．また，D地点に達したときの速さは$\boxed{v_0}$である．

万有引力による位置エネルギー

重力の位置エネルギー

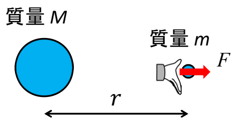
"地表"からh〔m〕の高さにあるm〔kg〕の物体は"地表"に対して**mgh**〔J〕だけ大きな位置エネルギーを持つ

重力 mg〔N〕に逆らってh〔m〕の高さ持ち上げるのに要する仕事＝mgh〔J〕
物体の位置エネルギーとして蓄えられている



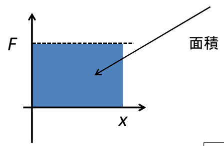
万有引力

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$



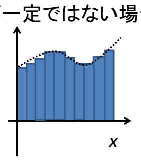
力の大きさが変わる場合の仕事

力が一定の場合　$W = F \cdot x$

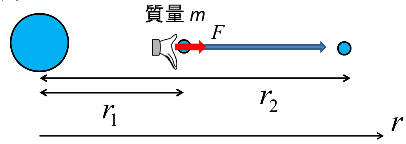


$$W = F(x)dx$$

力が一定ではない場合　$W = \int_0^x F(x)dx$

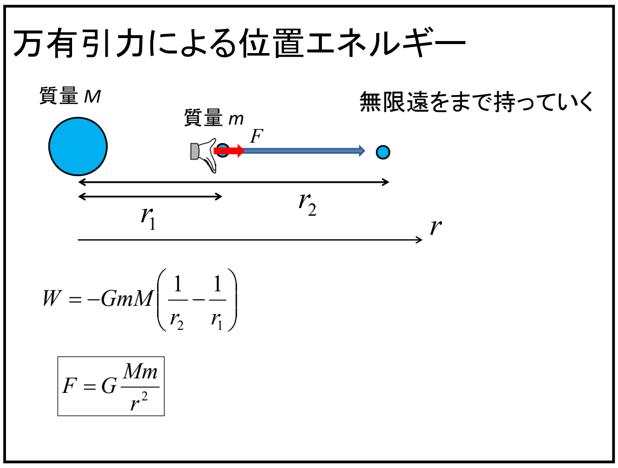


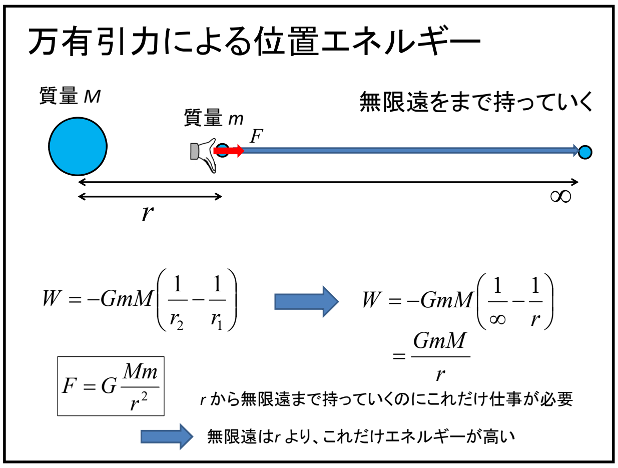
万有引力

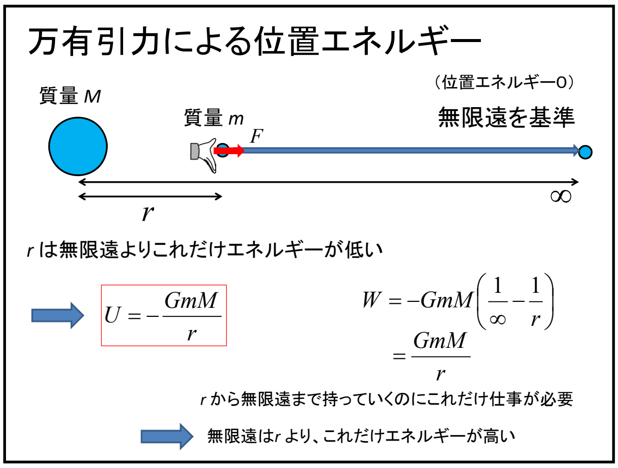


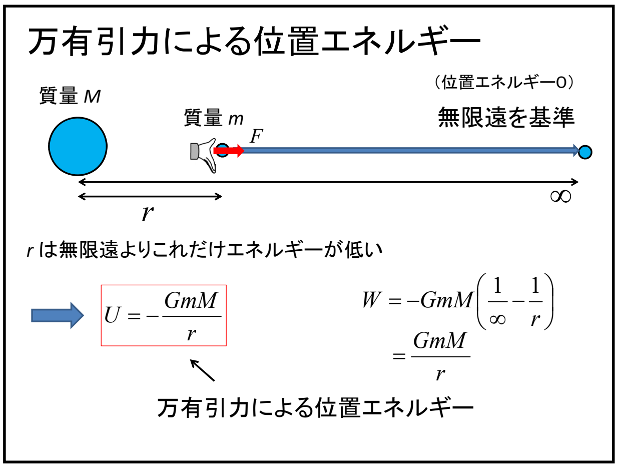
$$W = \int_{r_1}^{r_2} F(r)dr = \int_{r_1}^{r_2} G\frac{mM}{r^2}dr = -G\frac{mM}{r}\Big|_{r_1}^{r_2} = -GmM\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

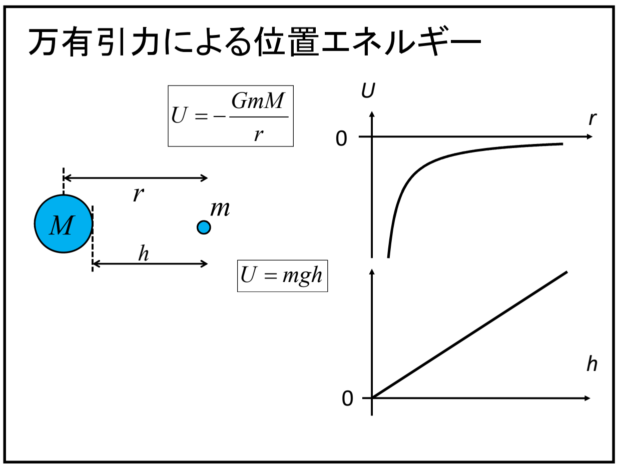
$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

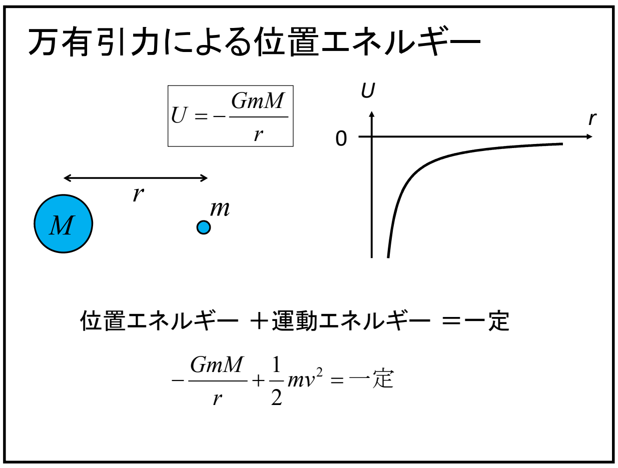

万有引力による位置エネルギー
質量 M
質量 m
F
無限遠をまで持っていく
r_1
r_2
r
$W=-GmM\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$
$F=G\frac{Mm}{r^2}$


万有引力による位置エネルギー
質量 M
質量 m
F
無限遠をまで持っていく
r
∞
$W=-GmM\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$
$W=-GmM\left(\frac{1}{\infty}-\frac{1}{r}\right)$
$=\frac{GmM}{r}$
$F=G\frac{Mm}{r^2}$
r から無限遠まで持っていくのにこれだけ仕事が必要
無限遠はr より、これだけエネルギーが高い


万有引力による位置エネルギー
質量 M
質量 m
F
（位置エネルギー0）
無限遠を基準
r
∞
r は無限遠よりこれだけエネルギーが低い
$U=-\frac{GmM}{r}$
$W=-GmM\left(\frac{1}{\infty}-\frac{1}{r}\right)$
$=\frac{GmM}{r}$
r から無限遠まで持っていくのにこれだけ仕事が必要
無限遠はr より、これだけエネルギーが高い

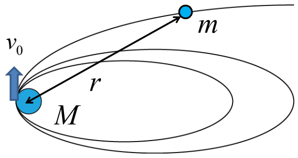

万有引力による位置エネルギー
質量 M
質量 m
F
（位置エネルギー0）
無限遠を基準
r
∞
r は無限遠よりこれだけエネルギーが低い
$U=-\frac{GmM}{r}$
$W=-GmM\left(\frac{1}{\infty}-\frac{1}{r}\right)$
$=\frac{GmM}{r}$
万有引力による位置エネルギー

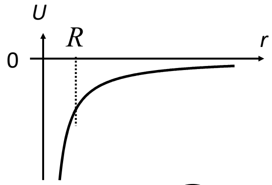

万有引力による位置エネルギー
$U=-\frac{GmM}{r}$
U
0
r
r
M
m
h
$U=mgh$
h
0

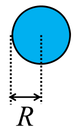

万有引力による位置エネルギー
$U=-\frac{GmM}{r}$
U
0
r
r
M
m
位置エネルギー ＋運動エネルギー ＝一定
$-\frac{GmM}{r}+\frac{1}{2}mv^2=$一定

引力圏からの脱出

$$\boxed{-\frac{GMm}{R}+\frac{1}{2}m{v_0}^2=\text{一定}}$$



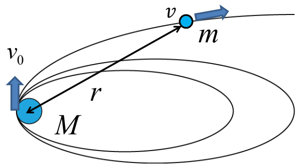


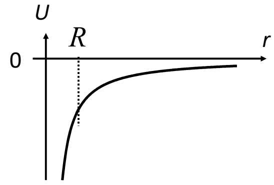


地球の半径R

引力圏からの脱出

$$\boxed{-\frac{GMm}{R}+\frac{1}{2}m{v_0}^2=\text{一定}}$$





$$-\frac{GMm}{r}+\frac{1}{2}mv^2=\text{一定}$$

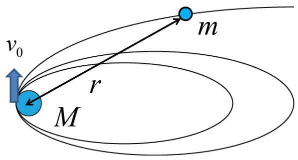
$$\xrightarrow{r\to\infty}\ 0+\frac{1}{2}m{v_\infty}^2=\text{一定}$$

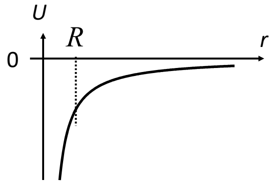
負だと満たす V は無い。
正ならば満たす V がある

$-\frac{GMm}{R}+\frac{1}{2}m{v_0}^2\geq 0$ ならば無限遠で速さがある。

→ 脱出可能。

引力圏からの脱出





$$v_0\geq\sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

$\boxed{V_0\text{:第2宇宙速度}}$

$-\frac{GMm}{R}+\frac{1}{2}m{v_0}^2\geq 0$ ならば無限遠で速さがある。

→ 脱出可能。