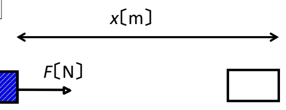
仕事とエネルギー

仕事

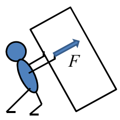
- 力を加えて物体を動かす
  物体に対して仕事をする
  物体は仕事をされる
- 仕事＝力×力を作用させた距離

$\boxed{W = F \cdot x}$

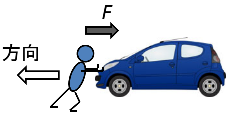


仕事の単位　J（ジュール）（=〔N・m〕）
物体に1〔N〕の力を加え1〔m〕動かしたときの仕事＝1〔J〕

仕事 $\boxed{W = F \cdot x}$

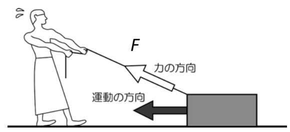


物体が移動しなければ
仕事をしたことにならない。

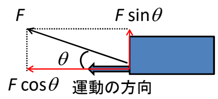


力の向きと動いた向きが逆の場合は、
物体に対して負の仕事をした。
（物体から仕事をされた。）

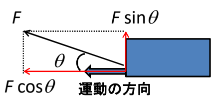
力の向きと移動方向



仕事＝力の 運動方向成分×力を作用させた距離

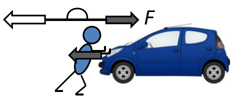


物体がなされる仕事（物体に対してした仕事）：$W=F\,x\cos\theta$



物体がなされる仕事（物体に対してした仕事）：$W=F\,x\cos\theta$

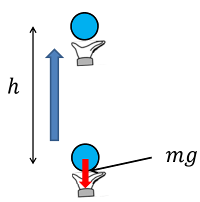
力の向きと動いた向きが逆の場合は、
物体に対して負の仕事をした。
（物体から正の仕事をされた。）



$W=F\,x\cos\theta=F\,x\cos\pi=-F\,x$

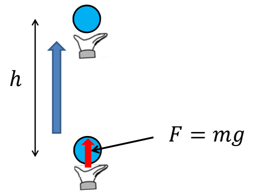
例

重力に逆らって質量m〔kg〕の物体をh〔m〕持ち上げる



例

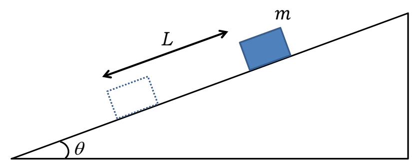
重力に逆らって質量m〔kg〕の物体をh〔m〕持ち上げる



仕事　W

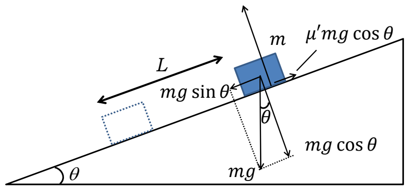
$W = F \cdot h = mgh$

問



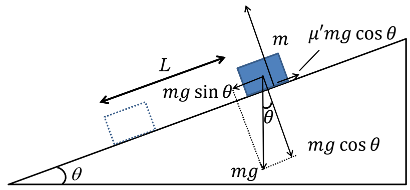
水平面に対してθの角度をなすあらい斜面にそって，質量m〔kg〕の物体が距離L〔m〕だけすべり下りる。重力加速度をg〔m/s^2〕，動摩擦係数をμ'として重力，斜面からの垂直抗力，斜面からの摩擦力が物体にする仕事を求めよ。

問



水平面に対してθの角度をなすあらい斜面にそって，質量m〔kg〕の物体が距離L〔m〕だけすべり下りる。重力加速度をg〔m/s^2〕，動摩擦係数をμ'として重力，斜面からの垂直抗力，斜面からの摩擦力が物体にする仕事を求めよ。

問



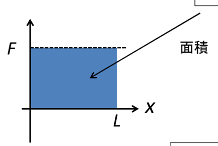
重力：　$mgL\sin\theta$

垂直抗力：0

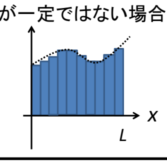
摩擦力：$-\mu' mgL\cos\theta$

力の大きさが変わる場合

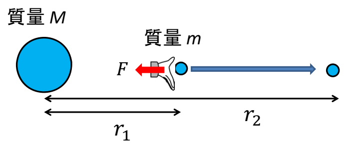
力が一定の場合　$W = F \cdot L$



力が一定ではない場合　$W = \int_0^L F(x)dx$



万有引力

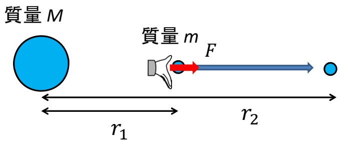


$F = G\dfrac{Mm}{r^2}$

万有引力定数：

$G = 6.67 \times 10^{-11}$〔N・m^2/kg^2〕

万有引力

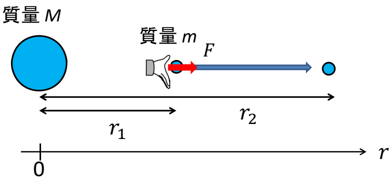


$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

万有引力定数：

$G = 6.67 \times 10^{-11}$ 〔N・m²/kg²〕

万有引力



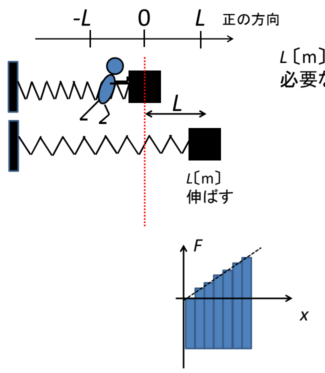
$$W = \int_{r_1}^{r_2} F(r)dr = \int_{r_1}^{r_2} G\frac{mM}{r^2}dr = -G\frac{mM}{r}\Big|_{r_1}^{r_2} = -G\frac{mM}{r_2} + G\frac{mM}{r_1}$$

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

万有引力定数：

$G = 6.67 \times 10^{-11}$ 〔N・m²/kg²〕

単振動



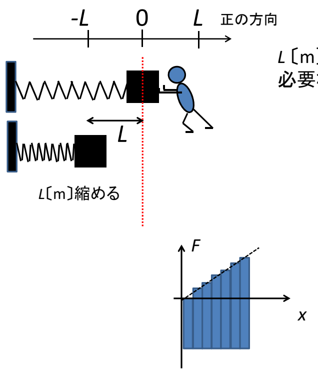
L〔m〕伸ばす（縮める）のに必要な仕事

$$W = \int_0^L F(x)dx$$

$$= \int_0^L (kx)dx = \frac{1}{2}kL^2$$

$$W = \frac{1}{2}kL^2$$

単振動



L〔m〕伸ばす（縮める）のに必要な仕事

$$W = \int_0^L F(x)dx$$

$$= \int_0^L (kx)dx = \frac{1}{2}kL^2$$

$$W = \frac{1}{2}kL^2$$

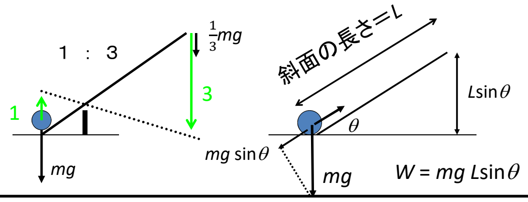
仕事の原理

5・8

てこや斜面を使って仕事をするとき,

→　力は小さくてすむが、移動距離は大きい

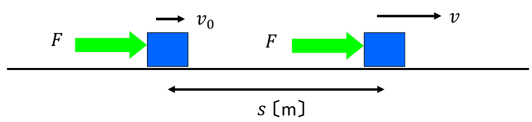
→　要する仕事は同じ



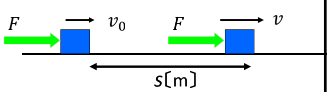
物体の速さを変えるのに必要な仕事

- 速度の向きに一定の力を加える続ける
- 力をある距離だけ加え続ける＝仕事をする

$$Fs = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2$$



- 一定の力 F〔N〕でt 秒間加速後の速度v〔m/s〕



$$\begin{cases} a = F/m \\ v = at + v_0 \end{cases}$$ より

$$v = \frac{F}{m}t + v_0 \rightarrow t = \frac{m}{F}(v - v_0)$$

代入

$$s = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 + v_0 t \longrightarrow s = \frac{1}{2}\frac{F}{m}\left(\frac{m}{F}(v - v_0)\right)^2 + v_0\frac{m}{F}(v - v_0)$$

$$(s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t) \qquad \longrightarrow Fs = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2$$

$$Fs = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2$$

エネルギーと仕事

エネルギー:仕事をするとその分だけ減少する物理量
仕事をされるとその分だけ増大する物理量
(=負の仕事をすると)

状態A
(エネルギーE_A)
状態B
(エネルギーE_B)
仕事W

$$\boxed{E_B = E_A - W}$$

エネルギーと仕事

エネルギー:仕事をするとその分だけ減少する物理量
仕事をされるとその分だけ増大する物理量
(=負の仕事をすると)

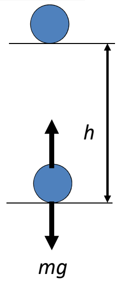
状態A
(エネルギーE_A)
状態B
(エネルギーE_B)
仕事W

$$\boxed{E_B = E_A + W}$$

重力の位置エネルギー

"地表"からh〔m〕の高さにあるm〔kg〕の物体は"地表"に対して **mgh**〔J〕だけ大きな位置エネルギーを持つ

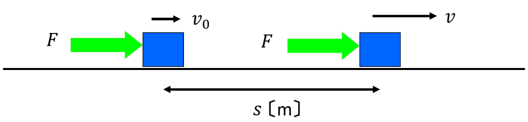
重力 mg〔N〕に逆らってh〔m〕の高さ持ち上げるのに要する仕事＝mgh〔J〕
(物体の位置エネルギーとして蓄えられている)



物体の速さを変えるのに必要な仕事

- 速度の向きに一定の力を加える続ける
- 力をある距離だけ加え続ける＝仕事をする

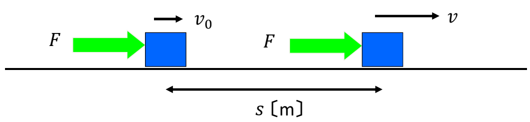
$$Fs = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2$$



運動エネルギー

- 速度の向きに一定の力を加える続ける
- 力をある距離だけ加え続ける＝仕事をする
- 仕事の分だけ変化する量＝運動エネルギー (K)

$$Fs = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}mv^2$$



重力のする仕事と運動エネルギー

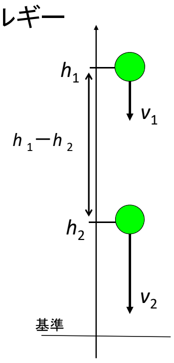
- 物体が重力で落下している

h_1からh_2までの間に物体が重力によってされた仕事＝$mg(h_1-h_2)$

＝運動エネルギーの増加

$$mg(h_1-h_2)=\frac{1}{2}mv_2{}^2-\frac{1}{2}mv_1{}^2$$

$$mgh_1+\frac{1}{2}mv_1{}^2=mgh_2+\frac{1}{2}mv_2{}^2$$



力学的エネルギー保存の法則

$$mgh_1+\frac{1}{2}mv_1{}^2=mgh_2+\frac{1}{2}mv_2{}^2$$

- 力学的エネルギー

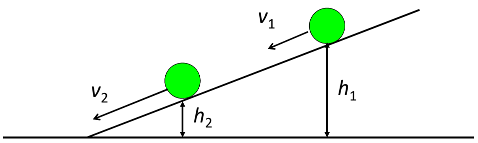
＝（重力の位置エネルギー）＋（運動エネルギー）

＝一定

重力のみがはたらく落下運動途中において
力学的エネルギーは常に一定

力学的エネルギー保存の法則

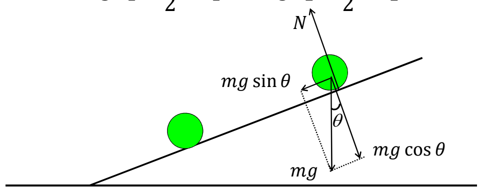
$$mgh_1+\frac{1}{2}mv_1{}^2=mgh_2+\frac{1}{2}mv_2{}^2$$



下り坂：位置エネルギーが減る→運動エネルギーが増す
上り坂：位置エネルギーが増す→運動エネルギーが減る

力学的エネルギー保存の法則

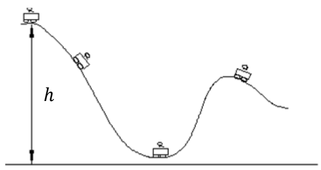
$$mgh_1+\frac{1}{2}mv_1{}^2=mgh_2+\frac{1}{2}mv_2{}^2$$



下り坂：位置エネルギーが減る→運動エネルギーが増す
上り坂：位置エネルギーが増す→運動エネルギーが減る

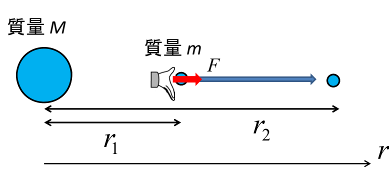
力学的エネルギー保存の法則

$$mgh_1+\frac{1}{2}mv_1{}^2=mgh_2+\frac{1}{2}mv_2{}^2$$



下り坂：位置エネルギーが減る→運動エネルギーが増す
上り坂：位置エネルギーが増す→運動エネルギーが減る

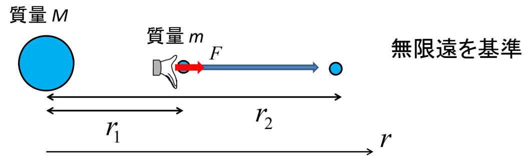
万有引力



$$W=\int_{r_1}^{r_2}F(r)dr=\int_{r_1}^{r_2}G\frac{mM}{r^2}dr=-G\frac{mM}{r}\Bigg|_{r_1}^{r_2}=-GmM\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

$$\boxed{F=G\frac{Mm}{r^2}}$$

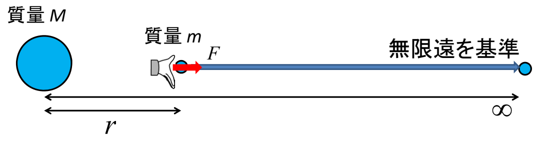
万有引力



$$W=-GmM\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

$$\boxed{F=G\frac{Mm}{r^2}}$$

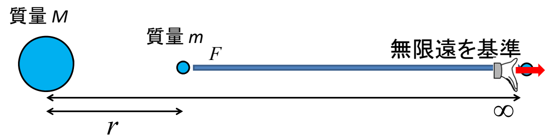
万有引力



$$W=-GmM\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

$$\boxed{F=G\frac{Mm}{r^2}}$$

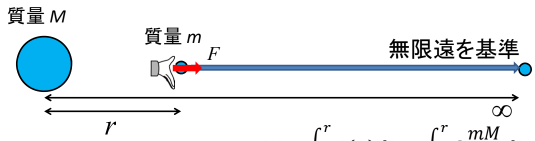
万有引力



$$W=-GmM\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

$$\boxed{F=G\frac{Mm}{r^2}}$$

万有引力

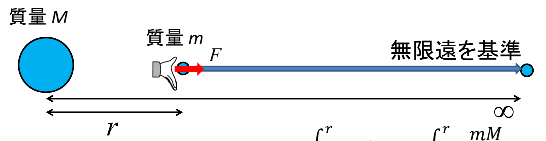


$$W=\int_{\infty}^{r}F(R)dR=\int_{\infty}^{r}G\frac{mM}{R^2}dR$$

$$W=-GmM\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)\Rightarrow W=-GmM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\infty}\right)$$

$$\boxed{F=G\frac{Mm}{r^2}}\Rightarrow\boxed{U=-\frac{GmM}{r}}$$

万有引力



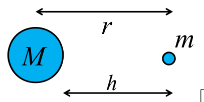
$$W=\int_{\infty}^{r}F(R)dR=\int_{\infty}^{r}G\frac{mM}{R^2}dR$$

$$W=-GmM\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)\Rightarrow W=-GmM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\infty}\right)$$

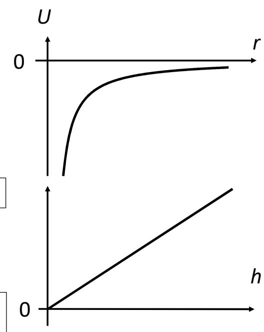
$$\boxed{F=G\frac{Mm}{r^2}}\ \underset{\text{微分}}{\overset{\text{積分}}{\rightleftarrows}}\ \boxed{U=-\frac{GmM}{r}}$$

万有引力の位置エネルギー

$$\boxed{U=-\frac{GmM}{r}}$$



$$\boxed{U=mgh}$$

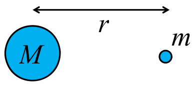


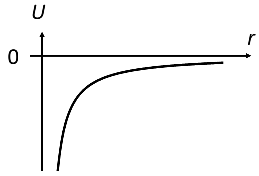
万有引力の大きさ
＝位置エネルギーの傾き

万有引力の向き
＝位置エネルギーの減る向き

万有引力の位置エネルギー

$$U = -\frac{GmM}{r}$$





位置エネルギー ＋運動エネルギー ＝一定

$$-\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2}mv^2 = 一定$$

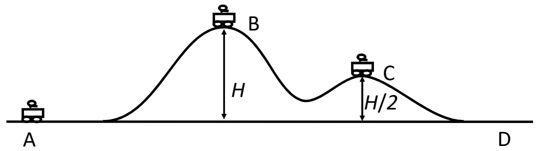
問16　力学的エネルギーの保存

A地点：

運動エネルギー　$= \frac{1}{2}mv_0^2$

位置エネルギー　$= mgh = 0$

A地点での重力による位置エネルギーを0とする



B地点：

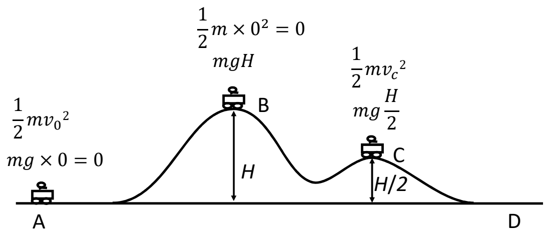
運動エネルギー　$= 0$

位置エネルギー　$= mgH$

問16　力学的エネルギーの保存

図のような滑らかに動く質量m〔kg〕のジェットコースターがある．A地点を速さv_0〔m/s〕でスタートし，高さH〔m〕のB地点を乗り越えるのに必要な速さを力学的エネルギーの保存則から求める．A地点での運動エネルギーはv_0を用いて表すと $\boxed{\frac{1}{2}mv_0^2}$ である．B地点での速度を0として，B地点での運動エネルギーは $\boxed{0}$ ，位置エネルギーはHを用いて表すと $\boxed{mgH}$ である．

問16　力学的エネルギーの保存



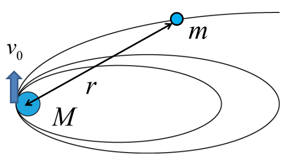
$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = mgH + 0$ ➡ $v_0 = ?$

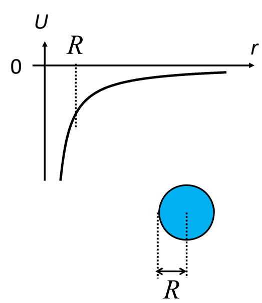
$\frac{1}{2}mv_C^2 + mg\frac{H}{2} = mgH$ ➡ $v_C = ?$

問16　力学的エネルギーの保存 ○

力学的エネルギーの保存則から，A地点での速さは，Hを用いて表すと $\boxed{\sqrt{2gH}}$ である．また，同様に考えるとA地点からH/ 2 だけ高いC地点での速さはHを用いて表すと $\boxed{\sqrt{gH}}$ でありA地点での速さの $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ 倍である．また，D地点に達したときの速さは $\boxed{v_0}$ である．

問17　引力圏からの脱出

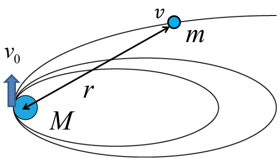


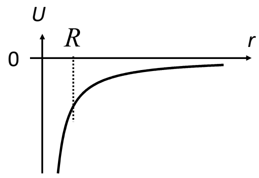


地球の半径R

問17　引力圏からの脱出

$$-\frac{GMm}{R}+\frac{1}{2}m{v_0}^2=一定$$





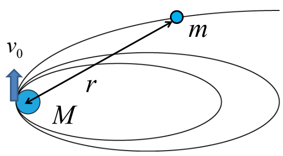
$$-\frac{GMm}{r}+\frac{1}{2}mv^2=一定$$

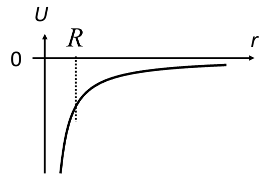
$$\xrightarrow{r\to\infty}\ 0+\frac{1}{2}m{v_\infty}^2=一定$$

負だと満たす v は無い。
正ならば満たす v がある

$-\frac{GMm}{R}+\frac{1}{2}m{v_0}^2\geq 0$ ならば無限遠で速さがある。
→ 脱出可能。

問17　引力圏からの脱出



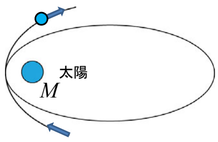


$$v_0\geq\sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

V_0：第2宇宙速度

$-\frac{GMm}{R}+\frac{1}{2}m{v_0}^2\geq 0$ ならば無限遠で速さがある。
→ 脱出可能。

引力圏からの脱出

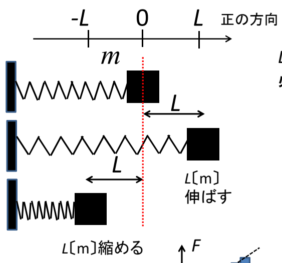


彗星には太陽の周りを回る周期彗星と，1度限りで太陽系を離れていくものがある．
彗星の現在位置と速度がわかると，どちら型の彗星かがわかる

$-\frac{GMm}{r}+\frac{1}{2}m{v_r}^2\geq 0$ より　$-\frac{GM}{r}+\frac{1}{2}{v_r}^2\geq 0$

ならば太陽系を離れていく

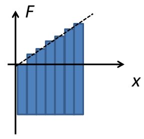
ばね



k：ばね定数

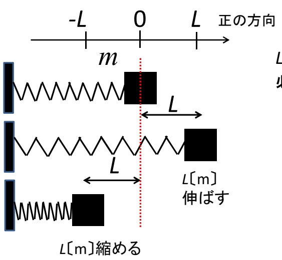
L〔m〕伸ばす（縮める）のに必要な仕事

$$W=\int_0^L F(x)dx$$
$$=\int_0^L (kx)dx=\frac{1}{2}kL^2$$



$$W=\frac{1}{2}kL^2$$

ばね



k：ばね定数

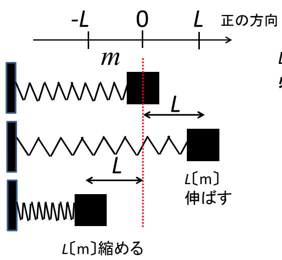
L〔m〕伸ばす（縮める）のに必要な仕事

$$W=\int_0^L F(x)dx$$
$$=\int_0^L (kx)dx=\frac{1}{2}kL^2$$

L [m]伸びている（縮んでいる）ばねには
$\frac{1}{2}kL^2$　だけエネルギーが蓄えられている。

$$W=\frac{1}{2}kL^2$$

ばね



k：ばね定数

L〔m〕伸ばす（縮める）のに必要な仕事

$$W=\int_0^L F(x)dx$$
$$=\int_0^L (kx)dx=\frac{1}{2}kL^2$$

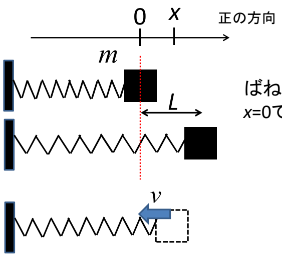
L [m]伸びている（縮んでいる）ばねには
$\frac{1}{2}kL^2$　だけエネルギーが蓄えられている。

エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=一定$$

ばね

k :ばね定数



ばねをL〔m〕伸ばして静かに放す。
x=0での速さは？

エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\text{一定}$$

$$\frac{1}{2}m\times0^2+\frac{1}{2}kL^2=\frac{1}{2}m{v_0}^2+\frac{1}{2}k\times0^2=\text{一定}$$

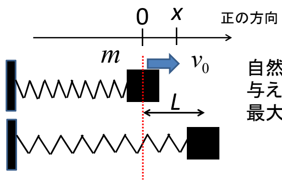
問15 (4) 参照

$$\longrightarrow\ \frac{1}{2}kL^2=\frac{1}{2}m{v_0}^2\ \longrightarrow\ v_0=\sqrt{\frac{k}{m}}L$$

ばね

5・14

k :ばね定数



自然な長さの状態でv_0 の速さを与える
最大の伸び L は？

エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\text{一定}$$

$$\frac{1}{2}m\times0^2+\frac{1}{2}kL^2=\frac{1}{2}m{v_0}^2+\frac{1}{2}k\times0^2=\text{一定}$$

$$\longrightarrow\ \frac{1}{2}kL^2=\frac{1}{2}m{v_0}^2\ \longrightarrow\ L=\sqrt{\frac{m}{k}}v_0$$