

力学

力学
(西欧16世紀～)

- ◆ 惑星の運動
- ◆ 地表での物体の運動

力学
(西欧16世紀～)

- ◆ 惑星の運動
 - コペルニクス (ポーランド1473-1543)
太陽中心の宇宙モデルから惑星の運動を説明
 - ティコ・ブラーエ (デンマーク1546-1601)
惑星の運動の精密観測(目視観測)
 - ケプラー (ドイツ1571-1630)
惑星の運動法則を見つける → ケプラーの法則

力学
(西欧16世紀～)

- ガリレオ・ガリレイ (伊 1564-1642)
 - ・ 軽いものも重いものも同じように落下する
 - ・ 落下運動は加速度が一定の運動
 - ・ 振り子の等時性

摩擦や抵抗の影響を取り除き、慣性を見つける
慣性：押し続けなくても物体は運動を続ける

力学の完成

- ニュートン (英 1642-1727)

惑星の運動 }
地表での物体の運動 } 統一

- ・ 運動の3法則
- ・ 万有引力の法則

1. ニュートンの法則 (p41)

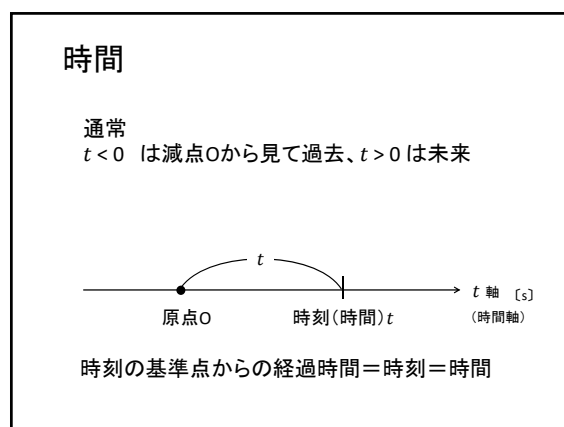
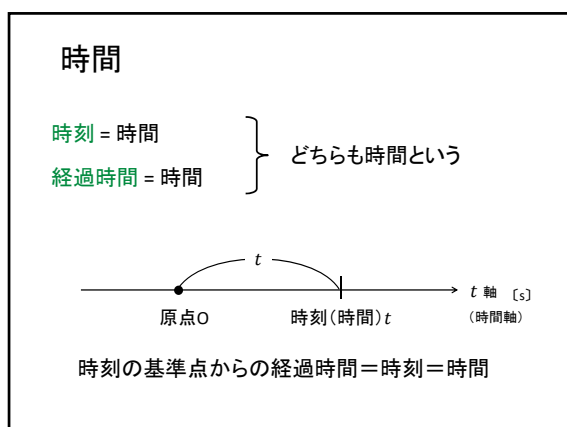
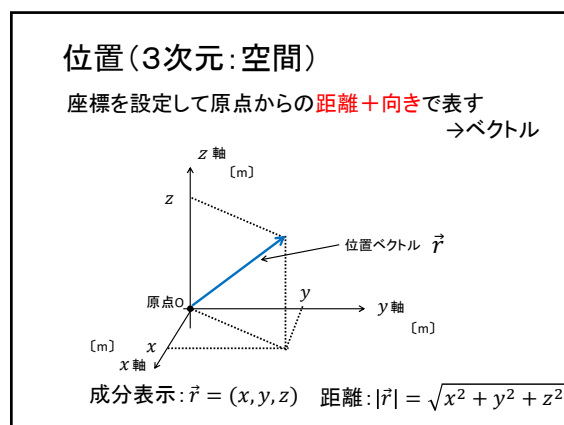
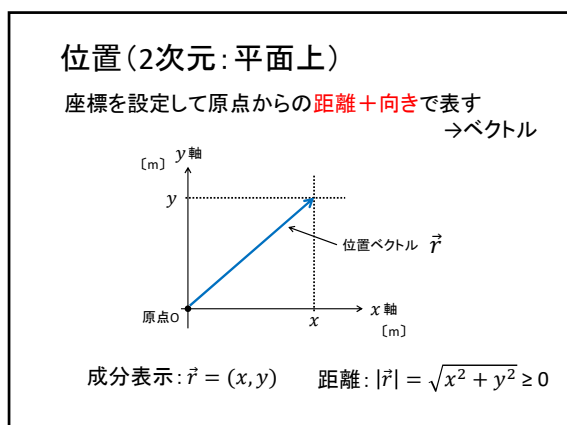
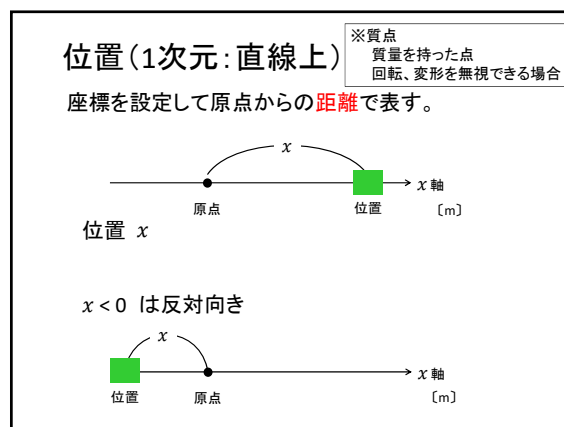
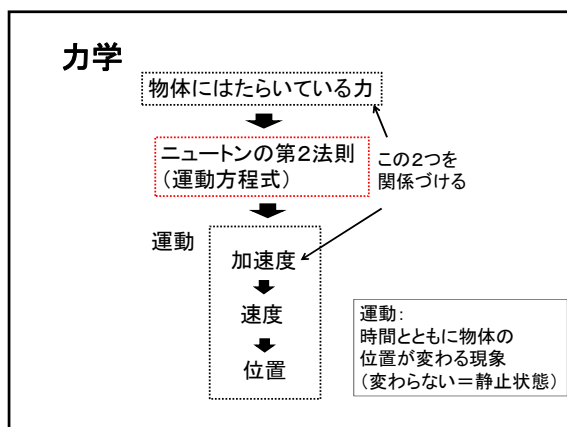
第1法則: 慣性の法則
「物体に外部から作用する力の和がゼロのとき、物体の速度は変わらない」

第2法則: 運動の法則
「物体に外部から作用する力の和がゼロでないとき、物体の速度が変わる(運動方程式)」

第3法則:
「物体Aから物体Bに力が及ぼされると、BからAにも同じ大きさで逆向きの力が及ぼされる(作用反作用の法則)」

2. 万有引力の法則 (p58)

あらゆる物体の間には引力がはたらき、その大きさは各々の質量積に比例し、距離の2乗に半比例する

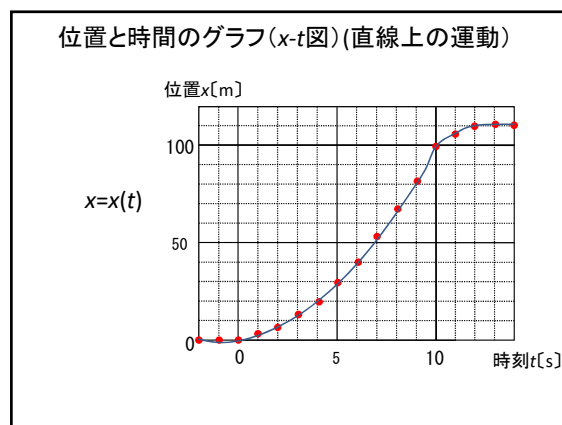


運動

時間とともに物体の位置が変わる現象
(変わらない場合=静止状態)

運動(1次元)の記述 = $x(t)$ (時刻の関数として表す)

例えば $x=t^2-2$ $t=0s$ で位置は -2 m
 $t=2s$ で位置は 2 m



変位と移動距離

運動(1次元)の記述 = $x(t)$ (時刻の関数として表す)

例えば t_0 で位置は -2 m
 t_1 で位置は 2 m ($t_0 < t_1 < t_2$)
 t_2 で位置は 0 m

$x(t_1)-x(t_0)$: 時刻 t_0 から t_1 までの変位(=4m)
 時刻 t_0 から t_1 までの移動距離は 4m

変位と移動距離

運動(1次元)の記述 = $x(t)$ (時刻の関数として表す)

例えば t_0 で位置は -2 m
 t_1 で位置は 2 m ($t_0 < t_1 < t_2$)
 t_2 で位置は 0 m

時刻 t_0 から t_2 までの変位 $x(t_2)-x(t_0)=2m$
 時刻 t_0 から t_2 までの移動距離は 4m+2m=6m

平均速度、平均の速さ(直線上の運動)

- 平均の速度 = 変位 ÷ 時間
- 平均の速さ = 移動距離 ÷ 時間

単位 m/s , (km/h)

速度:ベクトル量 (大きさと向きを持った量)
 速さ:スカラー量 (大きさ)

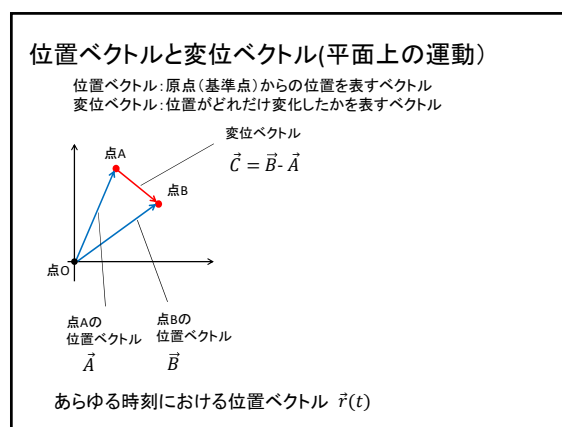
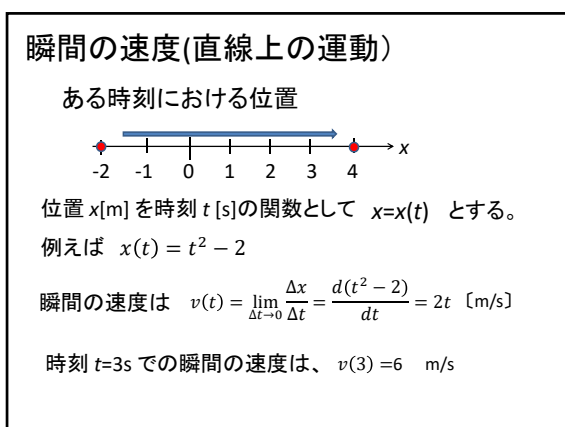
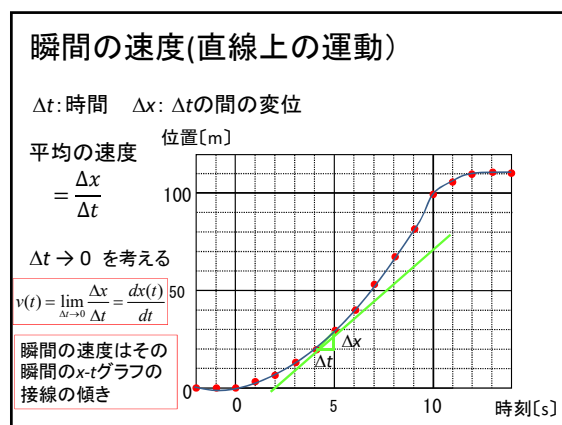
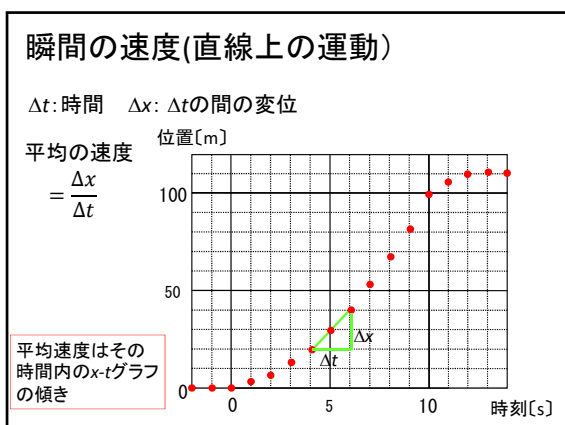
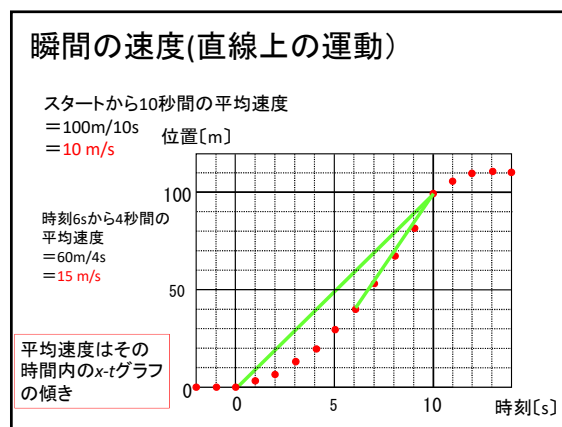
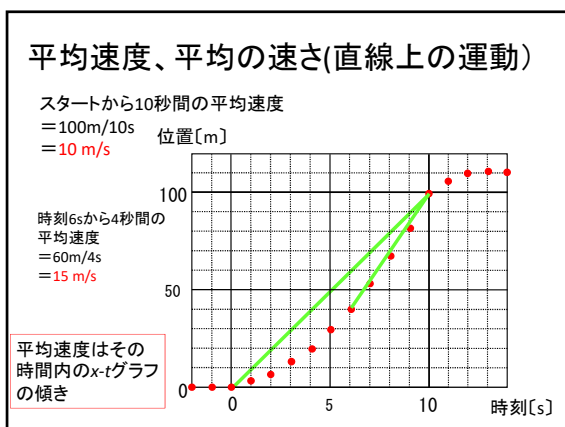
平均速度、平均の速さ(直線上の運動) ^{4/9}

- 平均の速度 = 変位 ÷ 時間
- 平均の速さ = 移動距離 ÷ 時間

単位 m/s , (km/h)

速度:ベクトル量 (大きさと向きを持った量)
 速さ:スカラー量 (大きさ)

10秒間で100m移動



位置ベクトルと変位ベクトル(平面上の運動)

位置ベクトル: 原点(基準点)からの位置を表すベクトル
 変位ベクトル: 位置がどれだけ変化しただけを表すベクトル

変位ベクトル $\vec{C} = \vec{B} - \vec{A}$

点Aの位置ベクトル \vec{A} 点Bの位置ベクトル \vec{B}

点Aの位置ベクトル \vec{A} 点Bの位置ベクトル \vec{B}

変位ベクトル $\vec{C} = \vec{B} - \vec{A}$

あらゆる時刻における位置ベクトル $\vec{r}(t)$

位置ベクトルと変位ベクトル(平面上の運動)

位置ベクトル: 原点(基準点)からの位置を表すベクトル
 変位ベクトル: 位置がどれだけ変化しただけを表すベクトル

変位ベクトル $\vec{C} = \vec{B} - \vec{A}$

点Aの位置ベクトル $\vec{A} = (1, 3)$ 点Bの位置ベクトル $\vec{B} = (2, 2)$

あらゆる時刻における位置ベクトル $\vec{r}(t)$

位置ベクトルと変位ベクトル(平面上の運動)

位置ベクトル: 原点(基準点)からの位置を表すベクトル
 変位ベクトル: 位置がどれだけ変化しただけを表すベクトル

変位ベクトル $\vec{C} = \vec{B} - \vec{A}$

点Aの位置ベクトル $\vec{A} = (1, 3)$ 点Bの位置ベクトル $\vec{B} = (2, 2)$

変位ベクトル $\vec{C} = \vec{B} - \vec{A} = (1, -1)$

あらゆる時刻における位置ベクトル $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$

位置ベクトルと速度ベクトル

変位ベクトル $\vec{C} = \vec{B} - \vec{A}$

平均速度 = 変位ベクトル ÷ 所要時間

ある物体が t [s] で点Aから点Bまで移動したとすると

$$\vec{v} = \frac{\vec{C}}{t} = \frac{\vec{B} - \vec{A}}{t}$$

・平均速度の向きは変位の向き

位置ベクトルと速度ベクトル

変位ベクトル $\vec{C} = \vec{B} - \vec{A}$

平均速度 = 変位ベクトル ÷ 所要時間

ある物体が t [s] で点Aから点Bまで移動したとすると

$$\vec{v} = \frac{\vec{C}}{t} = \frac{\vec{B} - \vec{A}}{t}$$

・平均速度の向きは変位の向き

位置ベクトルと速度ベクトル

変位ベクトル $\vec{C} = \vec{B} - \vec{A}$

平均速度 = 変位ベクトル ÷ 所要時間

ある物体が t [s] で点Aから点Bまで移動したとすると

$$\vec{v} = \frac{\vec{C}}{t} = \frac{\vec{B} - \vec{A}}{t}$$

・平均速度の向きは変位の向き

位置ベクトルと速度ベクトル

変位ベクトル
 $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$

平均速度=変位ベクトル÷所要時間

ある物体が Δt [s] で点Aから点Bまで移動したとすると

$$\vec{v} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

点Aの位置ベクトル $\vec{r}(t)$ 点Bの位置ベクトル $\vec{r}(t + \Delta t)$

・平均速度の向きは変位の向き

位置ベクトルと速度ベクトル

変位ベクトル
 $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$

平均速度=変位ベクトル÷所要時間

ある物体が Δt [s] で点Aから点Bまで移動したとすると

$$\vec{v} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

点Aの位置ベクトル $\vec{r}(t)$ 点Bの位置ベクトル $\vec{r}(t + \Delta t)$

・平均速度の向きは変位の向き

位置ベクトルと速度ベクトル

速度ベクトル

平均速度=変位ベクトル÷所要時間

ある物体が Δt [s] で点Aから点Bまで移動したとすると

瞬間の速度

$$\vec{v} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

点Aの位置ベクトル $\vec{r}(t)$

・平均速度の向きは変位の向き

位置ベクトルと速度ベクトル

速度ベクトル

平均速度=変位ベクトル÷所要時間

ある物体が Δt [s] で点Aから点Bまで移動したとすると

瞬間の速度

$$\vec{v} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

点Aの位置ベクトル $\vec{r}(t)$

・瞬間の速度の向きは軌跡の接線の向き

位置ベクトルと速度ベクトル

速度ベクトル

平均速度=変位ベクトル÷所要時間

ある物体が Δt [s] で点Aから点Bまで移動したとすると

瞬間の速度

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

点Aの位置ベクトル $\vec{r}(t)$

・瞬間の速度の向きは軌跡の接線の向き

位置ベクトルと速度ベクトル

速度ベクトル

平均速度=変位ベクトル÷所要時間

ある物体が Δt [s] で点Aから点Bまで移動したとすると

瞬間の速度

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt} \right)$$

点Aの位置ベクトル $\vec{r}(t)$

問1

図のように、原点OからABCDEFGの経路を通じて物体が運動した。それぞれの点は一定時間間隔で測定した物体の位置である。

(1) それぞれの点での瞬間の速度ベクトルの向きを图示しなさい

問1

(2) CD間の平均速度ベクトルの向きを图示しなさい。

(3) また、それぞれの区間の平均速度を比べたとき、一番平均速度の大きい区間は BC である。また一番遅い区間は EF である。

問2

$\vec{r}(t) = (2.0\cos(\pi \cdot t), 2.0\sin(\pi \cdot t))$

$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (-2.0\pi\sin(\pi \cdot t), 2.0\pi\cos(\pi \cdot t))$

$\vec{v}(0) = (-2.0\pi\sin(\pi \cdot 0), 2.0\pi\cos(\pi \cdot 0)) = (0, 2\pi)$

$\vec{v}(0.5) = (-2.0\pi\sin(\pi \cdot 0.5), 2.0\pi\cos(\pi \cdot 0.5)) = (-2\pi, 0)$

$\vec{v}(1.0) = (-2.0\pi\sin(\pi \cdot 1), 2.0\pi\cos(\pi \cdot 1)) = (0, -2\pi)$

問2

$\vec{r}(t) = (2.0\cos(\pi \cdot t), 2.0\sin(\pi \cdot t))$

$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (-2.0\pi\sin(\pi \cdot t), 2.0\pi\cos(\pi \cdot t))$

$\vec{v}(0) = (-2.0\pi\sin(\pi \cdot 0), 2.0\pi\cos(\pi \cdot 0)) = (0, 2\pi)$

$\vec{v}(0.5) = (-2.0\pi\sin(\pi \cdot 0.5), 2.0\pi\cos(\pi \cdot 0.5)) = (-2\pi, 0)$

$\vec{v}(1.0) = (-2.0\pi\sin(\pi \cdot 1), 2.0\pi\cos(\pi \cdot 1)) = (0, -2\pi)$

加速度

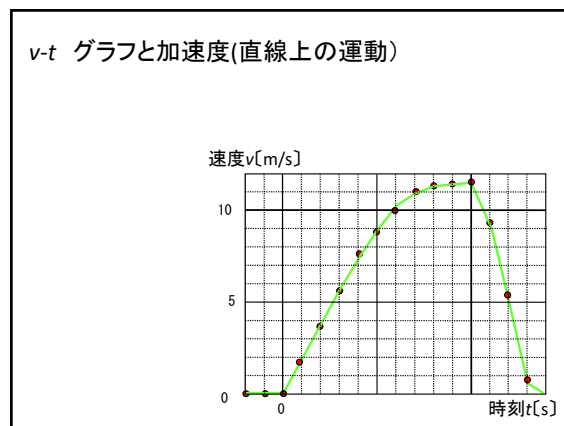
• 加速度 (ベクトル量)

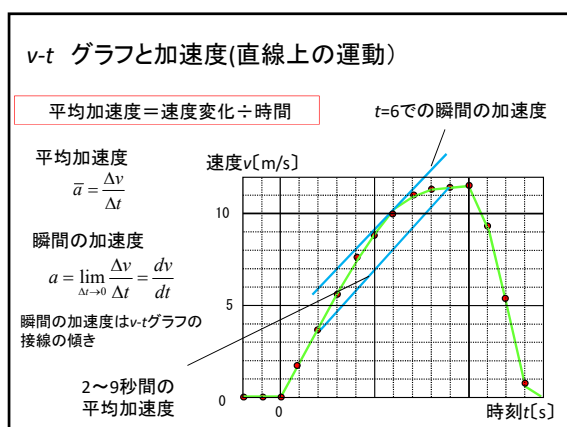
速度の **大きさ** や **向き** が1秒間でどれだけ変わるかを表す

速度の向きが変わるとき → その変わる割合が加速度
 速度の大きさが変わるとき

平均加速度 = 速度変化 ÷ 時間
 (→ 速度変化 = 平均加速度 × 時間)

単位 m/s^2 $\frac{[m/s]}{[s]} = [m/s^2]$





瞬間の加速度(直線上の運動)

ある時刻における位置
位置 x を時刻 t の関数として表す $x=x(t)$

例えば $x=t^2 - 2$

- 時刻 $t=3$ での瞬間の速度は、

$$v(3) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt} = \left[\frac{d(t^2 - 2)}{dt} \right]_{t=3} = [2t]_{t=3} = 6 \text{ m/s}$$
- 時刻 $t=3$ での瞬間の加速度は、

$$a(3) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt} = \left[\frac{d(2t)}{dt} \right]_{t=3} = [2]_{t=3} = 2 \text{ m/s}^2$$

加速度ベクトルと速度ベクトルの変化

- 加速度ベクトル = 速度ベクトルの変化
速度の向きが変わる(大きさは同じ) = 加速度

$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ $\bar{\vec{a}}(t) = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ (平均加速度)

$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$ (瞬間の加速度)

$$= \left(\frac{dv_x(t)}{dt}, \frac{dv_y(t)}{dt} \right)$$

問 直線上を運動している物体の位置 x が時間 t の関数として

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0$$

と表せるとき $t=0$ での位置、速度、加速度を求めよ。
 ただし、 a_0, v_0, x_0 は時間によらない定数とする。

問3

下の図(A~D)は平面上で運動する物体の位置を、一定時間間隔で記録した図である。

問3

下の図(A~D)は平面上で運動する物体の位置を、一定時間間隔で記録した図である。

- 速度一定の運動をしているのは **A** である。
- 速さ一定の運動をしているのは **A** と **C** である。

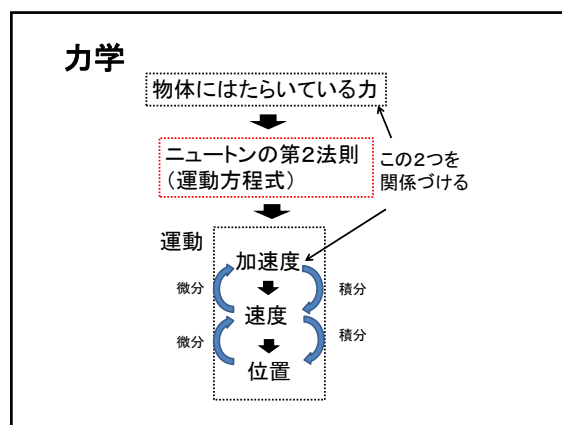
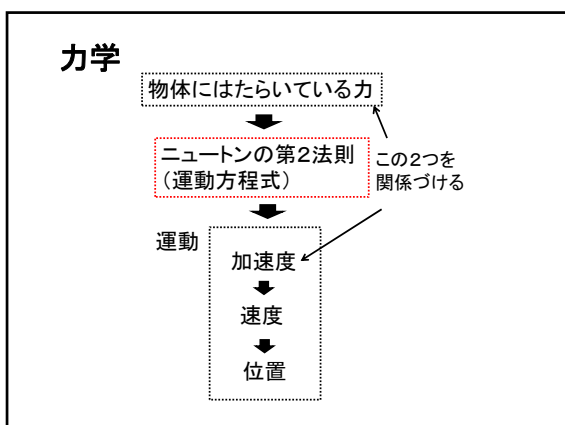
(3)速度の向きが変化しているのは C と D である。
 (4)加速度が0の運動をしているのは A である。
 (5)加速度の大きさは変化するが、向きが変化していないのは
 ない
 (6)加速度の大きさが一定の運動をしているのは
 A と C である。

直線上を運動している物体の位置 x が時間 t の関数として

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0t^2 + v_0t + x_0 \quad 4 \cdot 10$$

と表せるとき $t=0$ での位置、速度、加速度を求めよ。
 ただし、 a_0, v_0, x_0 は時間によらない定数とする。

速度 $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = a_0t + v_0$
 加速度 $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = a_0$
 より $t=0$ での 位置 $x(0) = x_0$
 速度 $v(0) = v_0$
 加速度 $a(0) = a_0$



(加速度 \Rightarrow 速度)

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow \int a(t) dt = \int \frac{dv(t)}{dt} dt \Rightarrow \int a(t) dt = \int dv$$

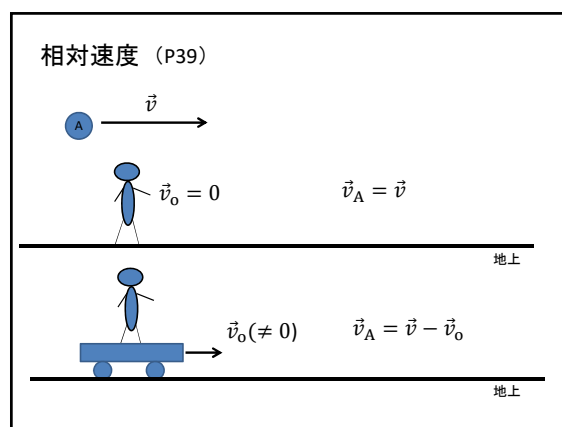
例 $a(t) = a_0$:一定(等加速度運動) 例 $a(t) = 3t$

$$\int a_0 dt = \int dv \qquad \int 3t dt = \int dv$$

$$a_0t + C_0 = v + C_1 \qquad \frac{3}{2}t^2 + C_0 = v + C_1$$

$$a_0t + C = v \quad (C = C_0 - C_1) \qquad \frac{3}{2}t^2 + C = v$$

$t=0$ で $v = v_0$ とすると $c = v_0$ $t=0$ で $v = v_0$ とすると

$$v = v_0 + a_0t \qquad v = v_0 + \frac{3}{2}t^2$$


(加速度 → 速度)

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow \int a(t) dt = \int \frac{dv(t)}{dt} dt \Rightarrow \int a(t) dt = \int dv$$

例 $a(t) = a_0$:一定(等加速度運動) 例 $a(t) = 3t$

$$\int a_0 dt = \int dv \qquad \int 3t dt = \int dv$$

$$a_0 t + C_0 = v + C_1 \qquad \frac{3}{2}t^2 + C_0 = v + C_1$$

$$a_0 t + C = v \quad (C = C_0 - C_1) \qquad \frac{3}{2}t^2 + C = v$$

$t=0$ で $v = v_0$ とすると $c = v_0$ $t=0$ で $v = v_0$ とすると

$$v = v_0 + a_0 t \qquad v = v_0 + \frac{3}{2}t^2$$

(速度 → 位置)

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow \int v(t) dt = \int \frac{dx(t)}{dt} dt \Rightarrow \int v(t) dt = \int dx$$

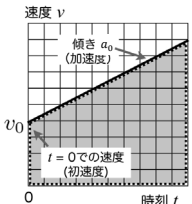
例 $a(t) = a_0$:一定 $t=0$ で $v = v_0$

$$v = v_0 + a_0 t$$

$$\int (v_0 + a_0 t) dt = \int dx$$

$$\frac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t + C = x$$

$t=0$ で $x = x_0$ とすると $c = x_0$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_0 t^2$$


等加速度直線運動	等速直線運動
1. 加速度 $a: a = a_0 (=一定)$	$a = 0 \text{ m/s}^2$
2. 速度 $v: v = v_0 + a_0 t \quad \left(a = \frac{v - v_0}{t}\right)$	$v = v_0 = 一定$
3. 位置 $x: x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_0 t^2$	$x = x_0 + v_0 t$
4. 移動距離 $s: s = x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}a_0 t^2$	$s = x - x_0 = v_0 t$

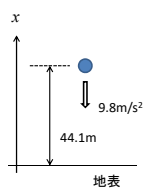
v_0 = 初速度($t=0$ での速度) x_0 ($t=0$ での位置)

問4.

地球表面付近で、すべての物体は下向きに約 9.8m/s^2 で加速して運動する。(重力加速度)

地表から高さ44.1mの位置にある物体を静かに放したところ、物体は下方向に運動した。(ただし、上向きを正の方向とする。)

- 物体を放してから2秒後の物体の速度は何 m/s か?
- 物体を放してから2秒後の物体の位置は地表から何mの高さか?
- 物体を放してから地表に着くまでの時間は何か?



問4.

地球表面付近で、すべての物体は下向きに約 9.8m/s^2 で加速して運動する。(重力加速度)

地表から高さ44.1mの位置にある物体を静かに放したところ、物体は下方向に運動した。(ただし、上向きを正の方向とする。)

- 物体を放してから2秒後の物体の速度は何 m/s か?
物体を放した瞬間の時刻 t を 0 とする。

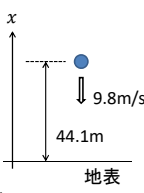
$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow -9.8 = \frac{dv}{dt} \Rightarrow -\int 9.8 dt = \int dv$$

$$\Rightarrow -9.8t + C = v$$

静かに放した $\Rightarrow t=0$ で $v=0 \Rightarrow C=0$

$$-9.8t = v \Rightarrow v = -9.8 \times 2 = -19.6$$

よって $v = -19.6\text{m/s}$



問4.

地球表面付近で、すべての物体は下向きに約 9.8m/s^2 で加速して運動する。(重力加速度)

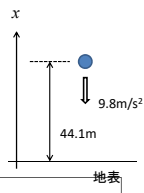
地表から高さ44.1mの位置にある物体を静かに放したところ、物体は下方向に運動した。(ただし、上向きを正の方向とする。)

- 物体を放してから2秒後の物体の位置は地表から何mの高さか?
①より

$$v = \frac{dx}{dt} = -9.8t \Rightarrow -\int 9.8t dt = \int dx$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2} \times 9.8t^2 + C$$

$t=0$ で $x=44.1\text{m} \Rightarrow C=44.1\text{m}$

$$x = 44.1 - \frac{1}{2} \times 9.8 \times 2^2 \Rightarrow x = 44.1 - \frac{1}{2} \times 9.8 \times 2^2 = 24.5\text{m}$$


問4.

地球表面付近で、すべての物体は下向きに約 9.8m/s^2 で加速して運動する。
(重力加速度)

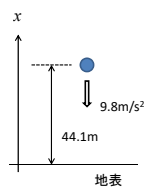
地表から高さ 44.1m の位置にある物体を静かに放したところ、物体は下方向に運動した。
(ただし、上向きを正の方向とする。)

③物体を放してから地表に着くまでの時間は何秒か？

$$x = 44.1 - \frac{1}{2} \times 9.8t^2$$

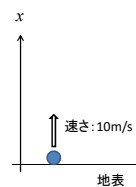
$$0 = 44.1 - \frac{1}{2} \times 9.8t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \times 44.1}{9.8}} = 3\text{s}$$



問5.

物体を地表から真上に速さ 10m/s で放り上げた。
(ただし、上向きを正の方向とする。)

①物体を放り上げてから2秒後の物体の速度は何 m/s か？②物体を放り上げてから2秒後の物体の位置は地表から何 m の高さか？

問5.

物体を地表から真上に速さ 10m/s で放り上げた。
(ただし、上向きを正の方向とする。)

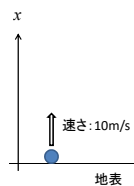
①物体を放り上げてから2秒後の物体の速度は何 m/s か？

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow -9.8 = \frac{dv}{dt} \Rightarrow - \int 9.8 dt = \int dv$$

$$\Rightarrow -9.8t + C = v$$

$$\Rightarrow v = -9.8 \times t + 10 \quad (t=0 \text{ で } v=10\text{m/s})$$

$$\Rightarrow v = -9.8 \times 2 + 10 = -9.6\text{m/s}$$



問5.

物体を地表から真上に速さ 10m/s で放り上げた。
(ただし、上向きを正の方向とする。)

②物体を放り上げてから2秒後の物体の位置は地表から何 m の高さか？

$$v = \frac{dx}{dt} = -9.8t + 10$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2} \times 9.8t^2 + 10t + C$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2} \times 9.8t^2 + 10t \quad (t=0 \text{ で } x=0)$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2} \times 9.8 \times 2^2 + 10 \times 2 = 0.4\text{m}$$

