

波動

波動: 振動が、物質中を伝わっていく現象

- 波源: 波が発生しているところ
- 媒質: 波を伝えるもの



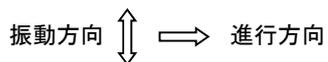
力学的な波 (媒質中を伝わる)
弾性波 (例: 地震、音、弦)

電磁波 (空間を伝わる)
電波、光、X線



横波・縦波

横波: 媒質の振動方向と波の進行方向が直角



光(電磁波) (電場と磁場が交互に生ずる横波)
地震(S波)

縦波: 媒質の振動方向と波の進行方向が同じ

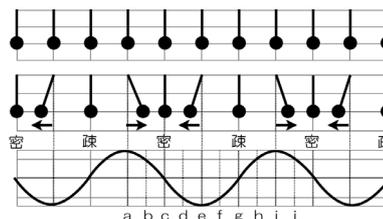


音: 空気の部分的な圧縮が波となって伝わる
流体 → 横波は生じない。
地震(P波)

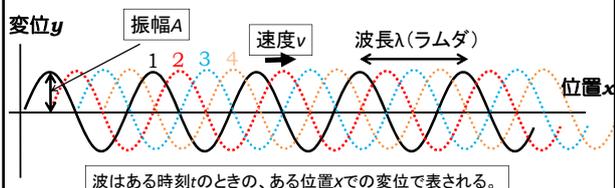


演示実験

縦波を横波で表す



波を表す量 (正弦波)

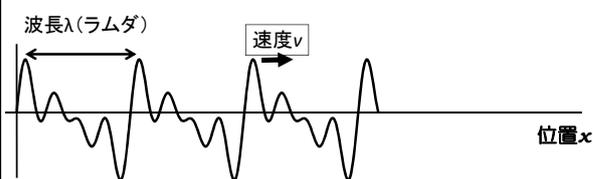


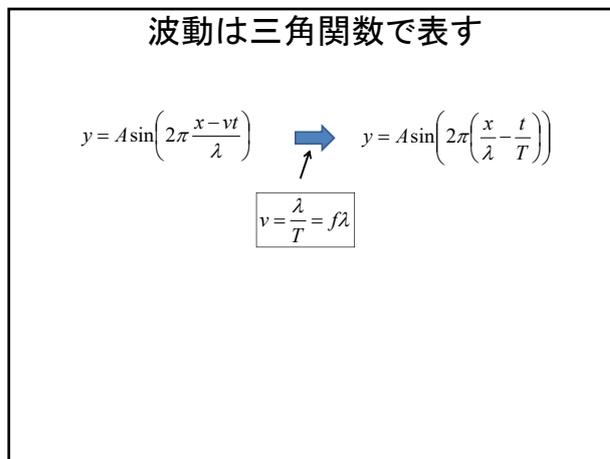
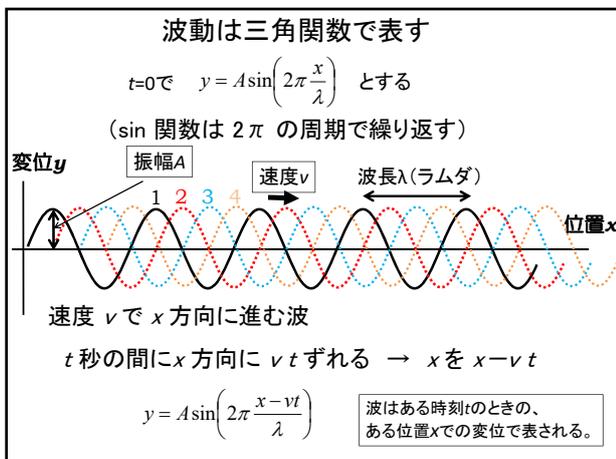
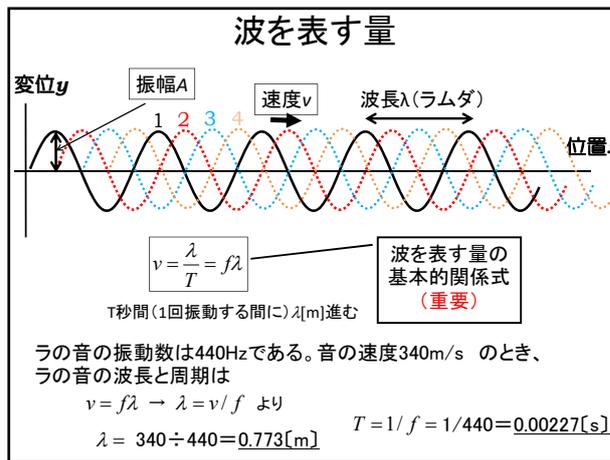
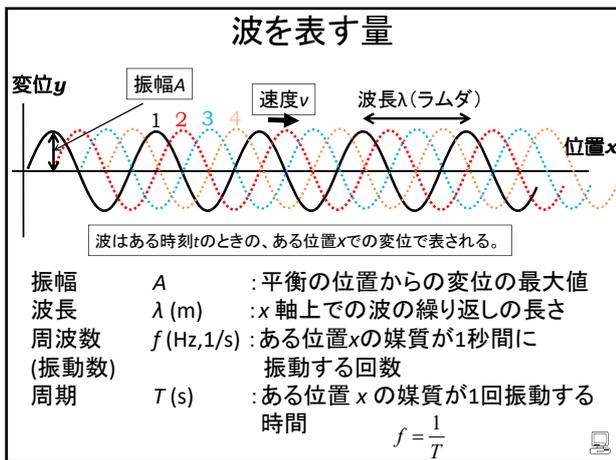
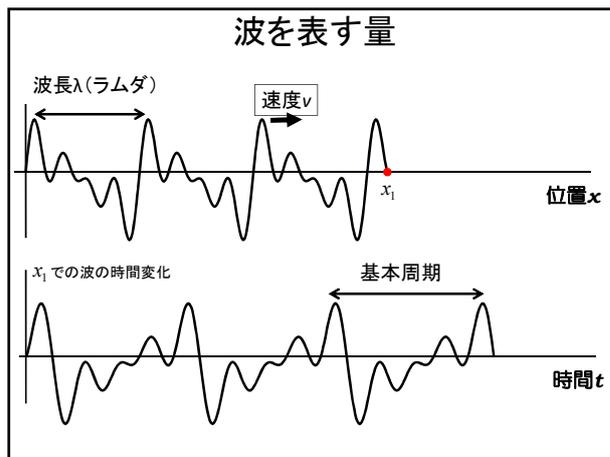
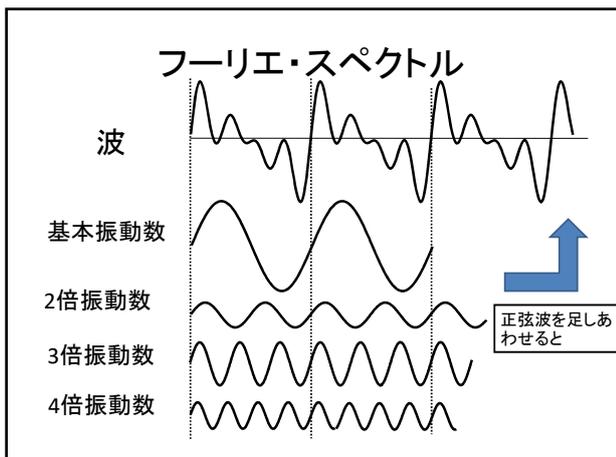
波はある時刻tのときの、ある位置xでの変位で表される。

振幅	A	: 平衡の位置からの変位の最大値
波長	λ (m)	: x 軸上での波の繰り返しの長さ
周波数 (振動数)	f (Hz, 1/s)	: ある位置xの媒質が1秒間に 振動する回数
周期	T (s)	: ある位置 x の媒質が1回振動する 時間
		$f = \frac{1}{T}$



波を表す量 (正弦波)





位相
変位 y

$t=0$ での式 波動の式
 $y = A \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$ $y = A \sin\left(2\pi \frac{x-vt}{\lambda}\right)$

$t=0$ での式 波動の式
 $y = A \sin(\phi)$ $y = A \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda} + \phi\right)$ $y = A \sin\left(2\pi \frac{x-vt}{\lambda} + \phi\right)$

一般に波動の式は
 $y = A \sin\left(2\pi \frac{x-vt}{\lambda} + \phi\right)$ と書ける。 ()の中を位相呼ぶ

問 34

-x 方向に300 m/sの速さで進む波長 0.50m、振幅0.01mの正弦波を下の式の形で記せ。ただし、時刻 $t=0$ で位置 $x=0.125$ での変位 y は -0.01であった。

$y = A \sin\left(2\pi \frac{x-vt}{\lambda} + \phi\right)$

$\left. \begin{matrix} v = -300\text{m/s} \\ \lambda = 0.5\text{m} \\ A = 0.01\text{m} \end{matrix} \right\}$ を代入して $y = 0.01 \sin\left(2\pi \frac{x+300t}{0.5} + \phi\right)$

時刻 $t=0$ で位置 $x=0.125$ での変位 y は -0.010 なので

$-0.01 = 0.01 \sin\left(2\pi \frac{0.125+300 \cdot 0}{0.5} + \phi\right) \Rightarrow -0.01 = 0.01 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) \Rightarrow -1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)$

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$ より $\frac{\pi}{2} + \phi = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \phi = \pi$

$y = 0.01 \sin\left(2\pi \frac{x+300t}{0.5} + \pi\right) = -0.01 \sin\left(2\pi \frac{x+300t}{0.5}\right)$

問 35 $y = A \sin\left(2\pi \frac{x-vt}{\lambda} + \phi\right) = A \sin\left(2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \phi\right) = A \sin\left(2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - ft\right) + \phi\right)$ $v = \frac{\lambda}{T} = f\lambda$

空気中を進むある波が、 $y(x,t) = 0.10 \sin(2\pi(x-2.0t))$ のような正弦波で表わされている。数値の単位はSI単位系であるとする。

この波の波長は (1.0) [m], 振動数は (2.0) [Hz], 速さは (2.0) [m/s]である。

下図に $t=0$ [s]での波形の概略を実線で、また、 $t=0.25$ [s]での波形の概略を点線で描け。 $y(x,0) = A \sin(2\pi x)$ $y(x,0.25) = A \sin(2\pi x - \pi)$

波動方程式

正弦波を表す式 $y(x,t) = A \sin\left(2\pi \frac{x-vt}{\lambda} + \phi\right)$ は

波動方程式 $\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$ を満たす。

一般には $y(x,t) = y(x-vt)$ or $y(x,t) = y(x+vt)$ の形の関数はすべて波動方程式を満たす。

$\therefore \frac{\partial^2 y(x \pm vt)}{\partial x^2} = y''(x \pm vt)$
 $\frac{\partial^2 y(x \pm vt)}{\partial t^2} = v^2 y''(x \pm vt)$

$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$
 $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$

P点
 x方向の力: $-T$
 y方向の力: $-T \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x$

Q点
 x方向の力: T
 y方向の力: $T \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}$

弦(線密度 ρ)

$\cos \theta \approx 1,$
 $\sin \theta \approx \tan \theta$

$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$
 $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$

P点
 x方向の力: $-T$
 y方向の力: $-T \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x$

Q点
 x方向の力: T
 y方向の力: $T \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}$

キャンセル

y方向の力: $T \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - T \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x = T \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) \cdot \Delta x$

y方向の運動方程式: $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) \cdot \rho \Delta x = T \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) \cdot \Delta x$ **6・12**

波の速さは媒質の復元力と密度で決まる

- 弦を伝わる波

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$
 T は張力 ρ は線密度
- 固体中を伝わる波
 横波 $v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ G は剛性率 ρ は密度 (S波:遅い)
 縦波 $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ E はヤング率 (P波:早い)
- 復元力が強い・密度が小さい → 速度が速い

- 波が一般的に起こす現象
 干渉
 反射
 屈折
 回折
- ドップラー効果

重ね合わせの原理(波は重なり合う)

- 波AとBが重なるときの変位
 =Aの変位+Bの変位

パルス波(連続的ではない孤立した波)の重ね合わせ

重ね合わせの原理(波は重なり合う)

- 波AとBが重なるときの変位
 =Aの変位+Bの変位

パルス波(連続的ではない孤立した波)の重ね合わせ

波動方程式

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

$$y(x-vt), y(x+vt)$$
 が解ならば

$$Ay(x-t) + By(x+t)$$
 も解

波の干渉

波が重なって振動を強めあつたり打ち消しあつたりする現象

点P : 強めあう
 点Q : 弱めあう
 点R : 強めあう

強めあう条件: $|L_1 - L_2| = m\lambda$ ($m=0,1,2,3,\dots$)

波の干渉

波が重なって振動を強めあつたり打ち消しあつたりする現象

点P : 強めあう
 点Q : 弱めあう
 点R : 強めあう

強めあう条件: $|L_1 - L_2| = m\lambda$ ($m=0,1,2,3,\dots$)

弱めあう条件: $|L_1 - L_2| = (2m+1) \cdot \frac{\lambda}{2}$ ($m=0,1,2,3,\dots$)

定常波

一定の場所で振動する波(どちらにも進まないように見える)
反対方向に進む同じ波(波長、振幅、速さが同じ)が重なるとできる

腹節

強めあう条件: $|L_1 - L_2| = m\lambda$ ($m=0,1,2,3,\dots$)

定常波

一定の場所で振動する波
反対方向に進む同じ波(波長、振幅、速さが同じ)が重なるとできる

$$y_1 = A \sin\left(2\pi \frac{x-vt}{\lambda} + \phi_1\right) \quad y_2 = A \sin\left(2\pi \frac{x+vt}{\lambda} + \phi_2\right)$$

$$y_1 + y_2 = A \sin\left(2\pi \frac{x-vt}{\lambda} + \phi_1\right) + A \sin\left(2\pi \frac{x+vt}{\lambda} + \phi_2\right)$$

$$= 2A \sin\left(2\pi \left(\frac{x}{\lambda}\right) + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \cos\left(2\pi \left(\frac{vt}{\lambda}\right) + \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}\right)$$

$$= 2A \sin\left(2\pi \left(\frac{x}{\lambda}\right) + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \cos\left(2\pi \left(\frac{t}{T}\right) + \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}\right)$$

$v = \frac{\lambda}{T} = f\lambda$

- 波が一般的に起こす現象

干渉
反射
屈折
回折

境界での反射

- 違う媒質の境界で反射が起きる

$v = f\lambda$

- 透過波の振動数は入射波と同じ(波長と速さが異なる)
(境界で変位は連続)

固定端: 反射波の位相は、 $\pi(180^\circ)$ だけずれる
自由端: 反射波の位相変化はない

境界での反射

- 違う媒質の境界で反射が起きる

$v = f\lambda$

- 透過波の振動数は入射波と同じ(波長と速さが異なる)
(境界で変位は連続)

固定端: 反射波の位相は、 $\pi(180^\circ)$ だけずれる
自由端: 反射波の位相変化はない

反射について

固定端: 反射波の位相は、 $\pi(180^\circ)$ だけずれる

自由端: 反射波の位相変化はない

固定端 $y=0$ 固定

自由端 y 自由 (応力0)

$\frac{\partial y}{\partial x} = 0$

弦(線密度 ρ)

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$$

$$\left(v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}\right)$$

P点 Q点

x方向の力: $-T$ キャンセル x方向の力: T

y方向の力: $-T \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x$ y方向の力: $T \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}$

y方向の力: $T \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - T \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x = T \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) \cdot \Delta x$

y方向の運動方程式: $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) \cdot \rho \Delta x = T \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) \cdot \Delta x$

反射について

固定端: 反射波の位相は、 $\pi(180^\circ)$ だけずれる

自由端: 反射波の位相変化はない

固定端

自由端

媒質

自由 (応力0)

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

入射角が 0° でないとき

入射角

入射波

反射波

反射角

媒質1

媒質2

透過波

屈折角

→ 屈折(波の進む向きが変わること)

入射角と反射角は等しい(屈折角は異なる)

屈折は媒質1と媒質2で波の速さが異なることで生じる

屈折は媒質1と媒質2で波の速さが異なることで生じる

媒質1に対する媒質2の相対屈折率 n_{12}

スネルの法則: $n_{12} \equiv \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$

絶対屈折率 n_1 (光)
真空に対する相対屈折率

$$\left[\begin{array}{l} n_1 = n_{01} = \frac{v_0}{v_1} \\ n_2 = n_{02} = \frac{v_0}{v_2} \end{array} \right] \Rightarrow n_{12} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

(0:真空)

入射角

屈折角

媒質1

媒質2

v_1

v_2

ホイヘンスの原理 (テキストp132)

波面 : 波の山または谷といった同じ位相を結んだ面

素源波: ある時刻の波面の上の各点が波源となり作る2次的な波

ホイヘンスの原理

各素源波の共通接平面(包絡面)が次の波面となる。

素源波自体は観測されず次の波面だけが見える。

(波の進行方向と波面は垂直)

波源

素源波

ホイヘンスの原理による屈折の説明

$$\sin \theta_1 = (v_1 t) / \overline{AB}$$

$$\sin \theta_2 = (v_2 t) / \overline{AB}$$

$$n_{12} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}$$

θ_1

θ_2

$v_1 t$

$v_2 t$

A

B

波長に比べて十分に大きいスケールを考える際には波の進路を幾何学的な線で扱うことができる。
 可視光の波長は約400nm~700nm なのでOK → 幾何光学

入射角
 反射角
 屈折角
 $n_{12} \equiv \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$

フェルマーの原理

1点から出て他の1点へ達する光が通る経路は、その2点を最短時間で進む経路である。

屈折率が位置に対して連続的に変化する場合に反射、屈折の法則を一般化。

フェルマーの原理

1点から出て他の1点へ達する光が通る経路は、その2点を最短時間で進む経路である。

入射角
 反射角
 屈折角
 $n_{12} \equiv \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$

フェルマーの原理

1点から出て他の1点へ達する光が通る経路は、その2点を最短時間で進む経路である。

直線が最も距離が短い
 ↓
 入射角 = 反射角

フェルマーの原理

1点から出て他の1点へ達する光が通る経路は、その2点を最短時間で進む経路である。

入射角
 屈折角
 $n_{12} \equiv \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$

フェルマーの原理

1点から出て他の1点へ達する光が通る経路は、その2点を最短時間で進む経路である。

A点からB点に光が行くのに要する時間 t

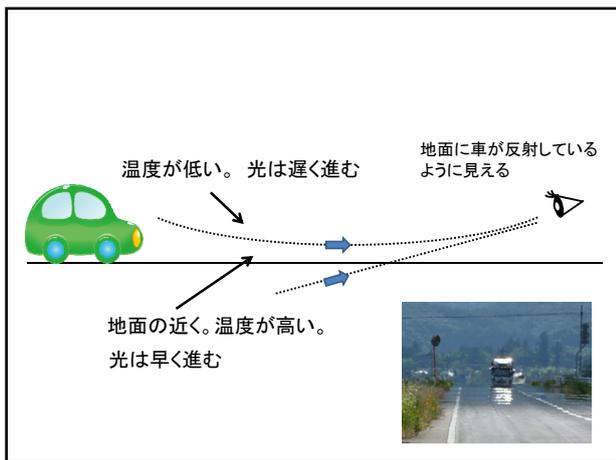
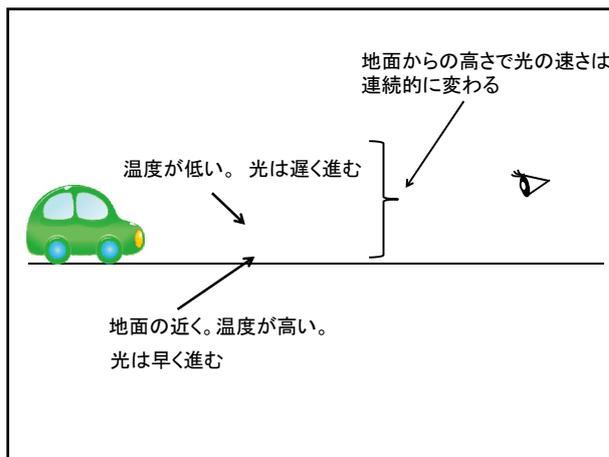
$$t = \frac{\sqrt{(x_1-x)^2 + y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_2-x)^2 + y_2^2}}{v_2}$$

最短時間 → $\frac{dt}{dx} = 0$

$$\rightarrow \frac{1}{v_1} \frac{x-x_1}{\sqrt{(x_1-x)^2 + y_1^2}} + \frac{1}{v_2} \frac{x-x_2}{\sqrt{(x_2-x)^2 + y_2^2}} = 0$$

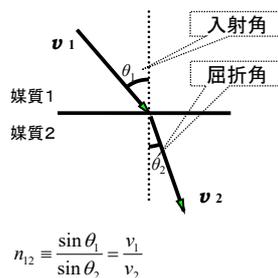
$$\rightarrow \frac{\sin \theta_1}{v_1} - \frac{\sin \theta_2}{v_2} = 0 \rightarrow n_{12} \equiv \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

逃げ水



全反射

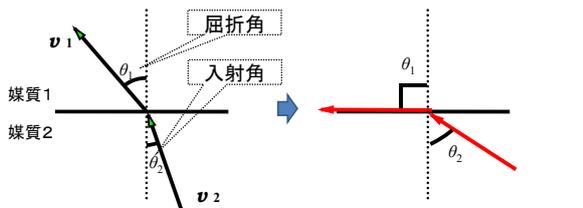
- (絶対) 屈折率が大きい物質から小さい物質に入射
- 屈折角が90°を越えるような入射角(臨界角)で全反射が起きる。エネルギーの100%が反射される。



$$n_{12} \equiv \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

全反射

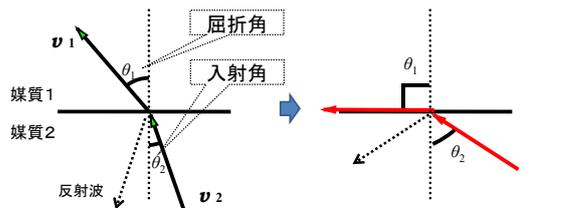
- (絶対) 屈折率が大きい物質から小さい物質に入射
- 屈折角が90°を越えるような入射角(臨界角)で全反射が起きる。エネルギーの100%が反射される。



$$n_{12} \equiv \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} \quad \text{臨界角} \quad n_{12} \equiv \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin \theta_c} = \frac{1}{\sin \theta_c}$$

全反射

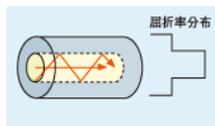
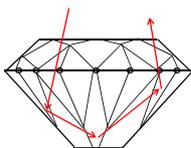
- 屈折率が大きい物質から小さい物質に入射した時に、屈折角が90°を越えるような入射角(臨界角)で全反射が起きる。



$$n_{12} \equiv \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} \quad \text{臨界角} \quad n_{12} \equiv \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin \theta_c} = \frac{1}{\sin \theta_c}$$

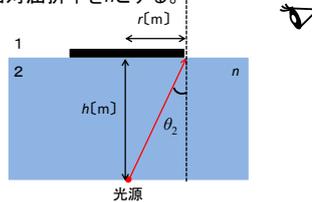
全反射の利用

- 光ファイバー
ガラスファイバーの中での全反射
- ダイヤモンド
屈折率が大い=2.4全反射が起こりやすい



問36

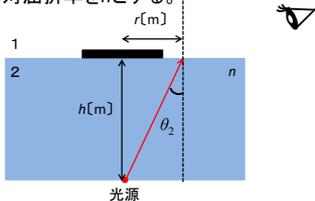
深さ h [m]の池の底にある光源を、水面を円板で覆うことによって、上方の空気中のどこからも見えないようにすることができる。円板の最小の半径 r [m]を求めよ。ただし、空気に対する水の相対屈折率を n とする。



$$n_{12} \equiv \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin \theta_2} = \frac{1}{\sin \theta_2} \quad n_{12} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{n}{1} = n$$

問36

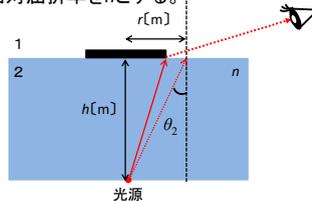
深さ h [m]の池の底にある光源を、水面を円板で覆うことによって、上方の空気中のどこからも見えないようにすることができる。円板の最小の半径 r [m]を求めよ。ただし、空気に対する水の相対屈折率を n とする。



$$n_{12} \equiv \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin \theta_2} = \frac{1}{\sin \theta_2} \quad n_{12} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{n}{1} = n$$

問36

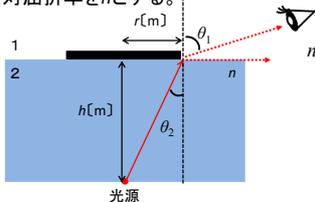
深さ h [m]の池の底にある光源を、水面を円板で覆うことによって、上方の空気中のどこからも見えないようにすることができる。円板の最小の半径 r [m]を求めよ。ただし、空気に対する水の相対屈折率を n とする。



$$n_{12} \equiv \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin \theta_2} = \frac{1}{\sin \theta_2} \quad n_{12} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{n}{1} = n$$

問36

深さ h [m]の池の底にある光源を、水面を円板で覆うことによって、上方の空気中のどこからも見えないようにすることができる。円板の最小の半径 r [m]を求めよ。ただし、空気に対する水の相対屈折率を n とする。



$$n = \frac{1}{\sin \theta_2} = \frac{1}{\left(\frac{r}{\sqrt{h^2 + r^2}} \right)}$$

$$\rightarrow r^2 n^2 = h^2 + r^2$$

$$\rightarrow r^2 (n^2 - 1) = h^2$$

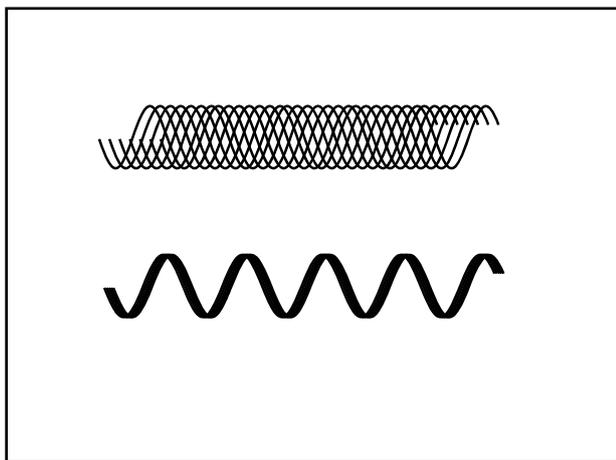
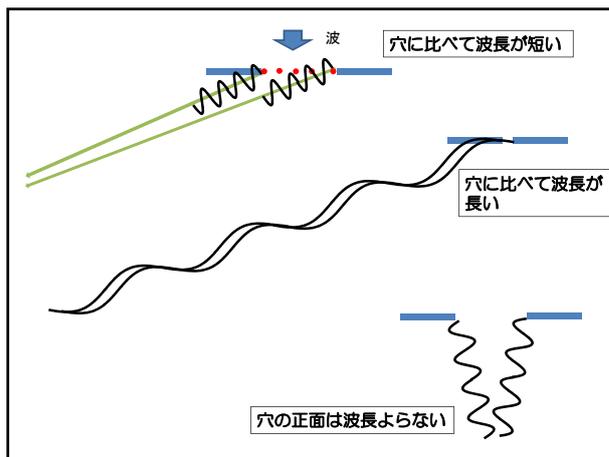
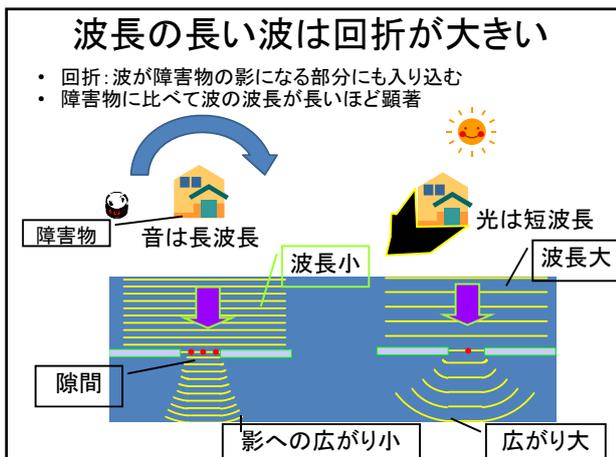
$$\rightarrow r = \frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

$$n_{12} \equiv \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin \theta_2} = \frac{1}{\sin \theta_2} \quad n_{12} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{n}{1} = n$$

- 波が一般的に起こす現象

干渉
反射
屈折
回折

- ドップラー効果



ドップラー効果

波源や観測者が運動 → 波源と異なる振動数の波が観測される

ここでは、音波を念頭において話を進める。

ちなみに、
振動数が大きいと高く聞こえる。
振動数が小さいと低く聞こえる。

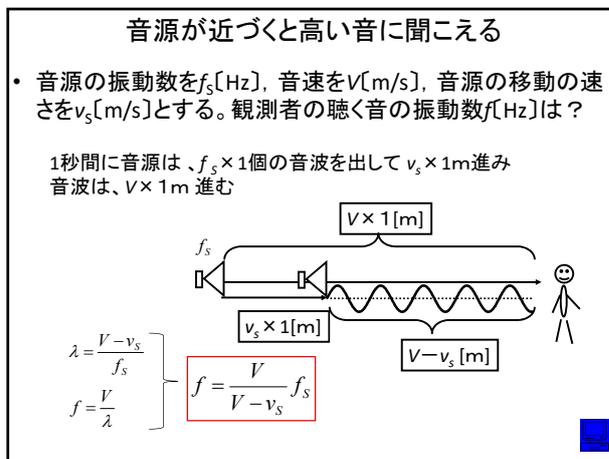
音は媒質に対して一定の速度で進む
音源の振動数 f_s [Hz] は音源の運動にかかわらず一定

ドップラー効果

波源や観測者が運動 → 波源と異なる振動数の波が観測される

- 音源の移動によるドップラー効果
 - 音源が近づく 高く聞こえる $f > f_s$
 - 音源が遠ざかる 低く聞こえる $f < f_s$
- 受信者の運動によるドップラー効果
 - 音源に近づく 高く聞こえる $f > f_s$
 - 音源から遠ざかる 低く聞こえる $f < f_s$

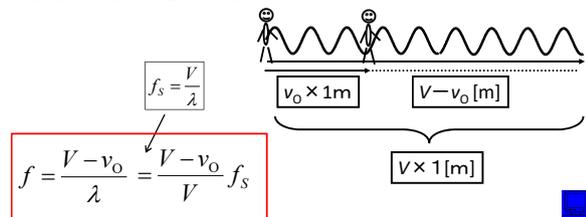
音は媒質に対して一定の速度で進む
音源の振動数 f_s [Hz] は音源の運動にかかわらず一定



観測者が遠ざかると低い音に聞こえる

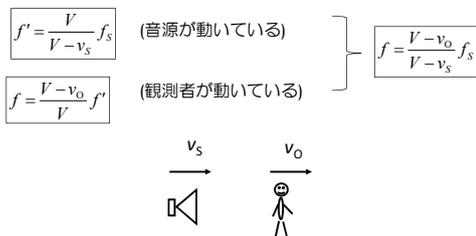
- 音源の振動数を f_s [Hz], 音速を V [m/s], 観測者の移動の速さを v_o [m/s]とする。観測者の聴く音の振動数 f [Hz]は？

観測者の最初の位置を通過した音波は1秒間に $V \times 1m$ 進み、この間に観測者は $v_o \times 1m$ 進む。観測者が聞く波の数は $V - v_o$ [m]の間にある波の数に等しいので

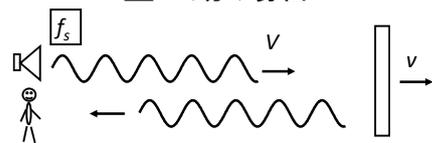


音源と観測者が動く場合

- 音源の振動数を f_s [Hz], 音速を V [m/s], 音源の移動の速さを v_s [m/s], 観測者の移動の速さを v_o [m/s]とすると、観測者の聴く音の振動数 f [Hz]は？



壁が動く場合



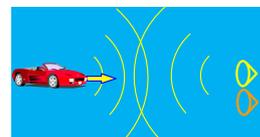
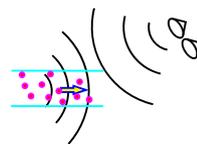
観測者(壁)が動いている 音源(壁)が動いている

$$f' = \frac{V - v}{V} f_s \quad f = \frac{V}{V + v} f'$$

$$f = \frac{V - v}{V + v} f_s$$

ドップラー効果の応用

- 超音波血流計
- スピードガン(電磁波)
- レーダー取り締まり器



問36

救急車がサイレンを鳴らしながら一定の速さで走行している。救急車が静止している人に向かい接近しているとき、人に聞こえるサイレンの音の振動数は525Hzであった。また、通り過ぎて人から遠ざかるとき、人に聞こえるサイレンの音の振動数は475Hzであった。音速を340m/sとすると、救急車の速さは(17) m/sである。

$$\left. \begin{aligned} 525 &= \frac{340}{340 - v_s} f_s \\ 475 &= \frac{340}{340 + v_s} f_s \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{525}{475} &= \frac{340 + v_s}{340 - v_s} \implies v_s = 17 \text{ m/s} \end{aligned}$$

