剛体の運動

剛体：形の変わらない大きさを持った物体

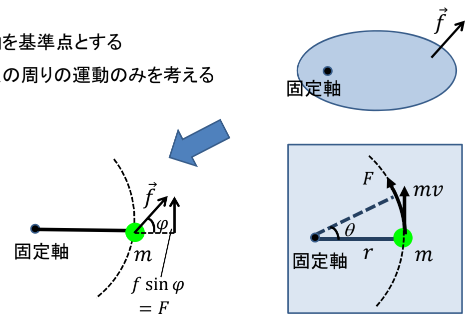
基準点の運動＋$\boxed{\text{その周りの回転}}$

力のモーメントと剛体のつり合い

固定軸の周りの運動

固定軸を基準点とする

基準点の周りの運動のみを考える



固定軸の周りを半径r、速さvで回転運動する質量mの物体

力 F を腕に垂直に Δt 秒間加える。

速さが v から v' に変化。（等速円運動ではない）

運動量変化と力積の関係

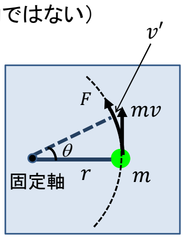
$$mv' - mv = F\cdot\Delta t$$

$$rmv' - rmv = rF\cdot\Delta t$$

$$rm\Delta v = N\cdot\Delta t \qquad (v' - v = \Delta v)$$

（N:力のモーメント）

$$rm\frac{\Delta v}{\Delta t} = N \quad \Rightarrow \quad mr\frac{dv}{dt} = N$$



$$mr\frac{dv}{dt} = N$$

$v = r\omega$ （ω:角速度）

$$mr\frac{d(r\omega)}{dt} = N$$

$$mr^2\frac{d\omega}{dt} = N$$

$\left(\frac{d\theta}{dt} = \omega\right)$

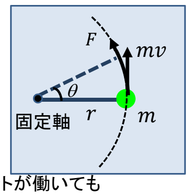
$$mr^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = N$$

$(I = mr^2)$

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = N$$

I：慣性モーメント〔$\mathrm{kg\cdot m^2}$〕

慣性モーメントが大きいと同じ力のモーメントが働いても
角速度の変化（＝角加速度）は小さい

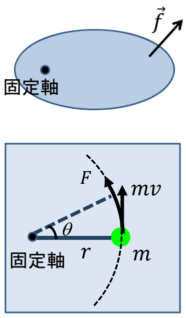


回転運動の方程式

回転角	θ	位置	x
角速度	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$	速度	$v = \frac{dx}{dt}$
慣性モーメント	$I(= mr^2)$	質量	m
方程式	$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = N$	方程式	$m\frac{d^2x}{dt^2} = F$

回転運動の方程式

回転角	θ
角速度	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
慣性モーメント	$I(= mr^2)$
方程式	$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = N$

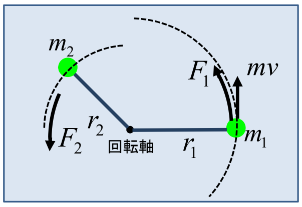


2個の場合

$I_1 \frac{d^2\theta}{dt^2} = N_1 \quad I_2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = N_2$

$(I_1 + I_2)\frac{d^2\theta}{dt^2} = N_1 + N_2$

$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = N$



$I = I_1 + I_2 = m_1 {r_1}^2 + m_2 {r_2}^2$ （I:慣性モーメント）

$N = N_1 + N_2$ （N:力のモーメント）

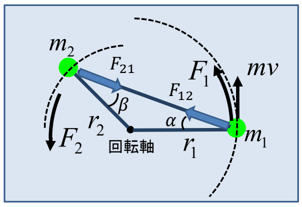
2個の場合

$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

$I_1 \frac{d^2\theta}{dt^2} = N_1 \quad I_2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = N_2$

$(I_1 + I_2)\frac{d^2\theta}{dt^2} = N_1 + N_2$

$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = N$



$I = I_1 + I_2 = m_1 {r_1}^2 + m_2 {r_2}^2$ （I:慣性モーメント）

$N = N_1 + N_2$ （N:力のモーメント）

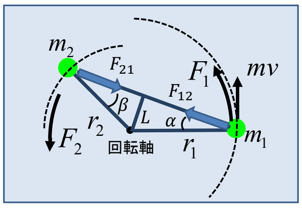
2個の場合

$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

$I_1 \frac{d^2\theta}{dt^2} = N_1 \quad I_2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = N_2$

$(I_1 + I_2)\frac{d^2\theta}{dt^2} = N_1 + N_2$

$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = N$



$N_{12} = r_1 \cdot F_{12} \sin\alpha \;= F_{12}L$

$N_{21} = r_2 \cdot F_{21} \sin\beta \;= F_{21}L$

$I_1 \frac{d^2\theta}{dt^2} = N_1 + F_{12}L$

$I_1 \frac{d^2\theta}{dt^2} = N_1 - F_{12}L$

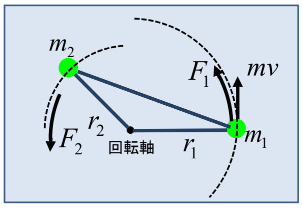
足し合わせると内力による力のモーメントはキャンセル

2個の場合

$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = N$

$I = I_1 + I_2 = m_1 {r_1}^2 + m_2 {r_2}^2$

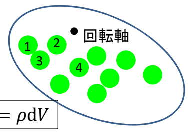
$N = N_1 + N_2$



一般に

$I = \sum_{i=1}^{N} m_i {r_i}^2$ 　r:回転軸からの距離

$\Rightarrow \quad I = \underset{剛体}{\int} r^2 \mathrm{dm} = \underset{剛体}{\int} r^2 \rho \mathrm{d}V$



dm:微小部分の質量　ρ :密度　$\boxed{\mathrm{dm} = \rho \mathrm{d}V}$

回転運動の方程式

回転角	θ	位置	x
角速度	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$	速度	$v = \frac{dx}{dt}$
慣性モーメント	$I(= mr^2)$	質量	m
方程式	$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = N$	方程式	$m\frac{d^2x}{dt^2} = F$

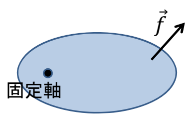
回転運動の方程式

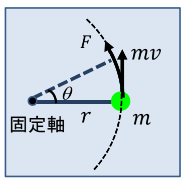
回転角　θ

角速度　$\omega = \frac{d\theta}{dt}$

慣性モーメント　$I(= mr^2)$

方程式　$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = N$





一般に

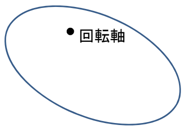
$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}=N \qquad \left(I\frac{d\omega}{dt}=N\right)$$

$$I=\int_{剛体} r^2\mathrm{dm}=\int_{剛体} r^2\rho\mathrm{d}V$$

dm:微小部分の質量

ρ:密度(単位体積当たりの質量)

r:回転軸からの距離



一般に　N:力のモーメント

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}=N \qquad \left(I\frac{d\omega}{dt}=N\right)$$

$$I=\int_{剛体} r^2\mathrm{dm}=\int_{剛体} r^2\rho\mathrm{d}V$$

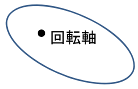
dm:微小部分の質量

ρ:密度(単位体積当たりの質量)

r:回転軸からの距離

$$\rho=\frac{M}{V} \qquad \rho_S=\frac{M}{S} \qquad \rho_L=\frac{M}{L}$$

質量M



板などの2次元物体(面積S)

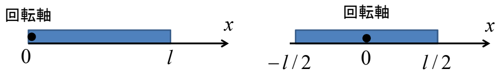
$$I=\int_{剛体} r^2\rho_S\mathrm{d}S$$

棒などの1次元物体(長さL)

$$I=\int_{剛体} r^2\rho_L\mathrm{d}x$$

単純な形状の慣性モーメント

細い一様な棒の回転軸の周りの慣性モーメント
(質量M、長さl)



$$\int_{剛体} r^2dm=\int_{剛体} r^2\rho dV \Rightarrow \int \rho x^2dx \qquad \left(\rho=\frac{M}{l}\right)$$

1次元

慣性モーメント I

$$I=\int_0^l \frac{M}{l}x^2dx=\frac{Ml^2}{3}$$

慣性モーメント I

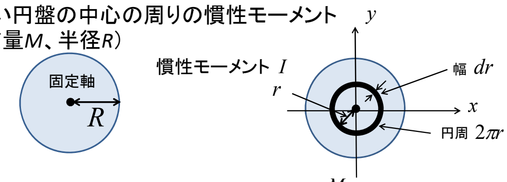
$$I=\int_{-l/2}^{l/2} \frac{M}{l}x^2dx=\frac{Ml^2}{12}$$

$$I=\int_{剛体} r^2\rho_L\mathrm{d}x \qquad \rho_L=\frac{M}{L}$$

単純な形状の慣性モーメント

問26

薄い円盤の中心の周りの慣性モーメント
(質量M、半径R)



慣性モーメント I

円環　$dm=\rho\cdot dV=\rho\cdot 2\pi r\cdot dr \qquad \rho=\frac{M}{\pi R^2}$

円盤　$I=\int_{剛体} r^2dm=\int_0^R r^2\frac{M}{\pi R^2}\cdot 2\pi r\cdot dr=\frac{M}{R^2}\int_0^R 2r^3dr$

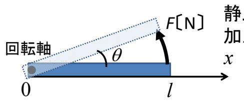
$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}MR^2$$

$$I=\int_{剛体} r^2\rho_S\mathrm{d}S \qquad \rho_S=\frac{M}{S}$$

単純な形状の物体の回転運動

5・22

質量M、長さlの細い一様な棒の回転運動



静止している棒の端に一定の力F〔N〕を加え続ける。

力のモーメント $N=Fl$

慣性モーメント I

$$I=\int_0^l \frac{M}{l}x^2dx=\frac{Ml^2}{3}$$

$$I\frac{d\omega}{dt}=N$$

$$\Rightarrow \frac{Ml^2}{3}\frac{d\omega}{dt}=Fl \qquad \left(\frac{d\omega}{dt}=\frac{3F}{Ml}\right)$$

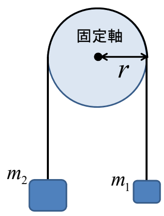
$$\Rightarrow \omega=\frac{3F}{Ml}t+\omega_0 \quad (\omega_0{:}t{=}0での\omega) \xRightarrow{\omega_0=0} \omega=\frac{3F}{Ml}t$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\omega \Rightarrow \theta=\frac{3F}{2Ml}t^2+\theta_0 \quad (\theta_0{:}t{=}0での\theta) \xRightarrow{\theta_0=0} \theta=\frac{3F}{2Ml}t^2$$

単純な形状の物体の回転運動

問27

薄い円盤(質量M、半径r)



慣性モーメント I

$$I=\frac{1}{2}Mr^2$$

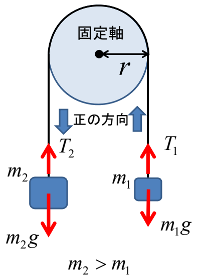
円盤に質量m_1 m_2のおもりをつなげた糸をかける。摩擦で糸はすべらないとする。おもりの運動を考える。($m_2>m_1$)
重力加速度の大きさを g とする。

$m_2>m_1$

問27　単純な形状の物体の回転運動

薄い円盤（質量M、半径r）

(1) 摩擦が0で糸がすべって
円盤が回転しない場合を考える。



$m_2 > m_1$

m_2の下がる加速度を a とする。
（m_1は a で上に加速する。）

$m_2a = m_2g - T_2$　（m_2の運動方程式）

$m_1a = T_1 - m_1g$　（m_1の運動方程式）

$T_2 = T_1$

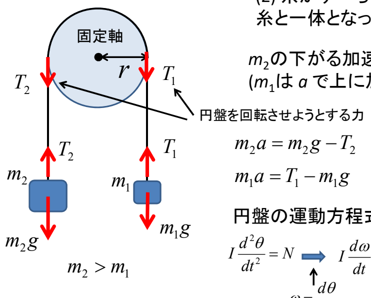
$\Rightarrow$ $(m_1+m_2)a = (m_2-m_1)g$

$\Rightarrow$ $a = \dfrac{m_2-m_1}{m_1+m_2}g$　$T_2 = \dfrac{2m_1m_2}{m_1+m_2}g$

問27　単純な形状の物体の回転運動

薄い円盤（質量M、半径r）

(2) 糸がすべらず、円盤が
糸と一体となって回転する場合。



$m_2 > m_1$

m_2の下がる加速度を a とする。
（m_1は a で上に加速する。）

$m_2a = m_2g - T_2$　（m_2の運動方程式）

$m_1a = T_1 - m_1g$　（m_1の運動方程式）

円盤の運動方程式

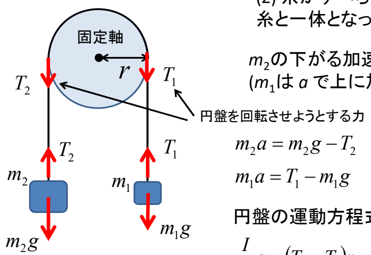
$I\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = N \Rightarrow I\dfrac{d\omega}{dt} = N \Rightarrow \dfrac{I}{r}\dfrac{dv}{dt} = N$

$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$　　$v = r\omega$

問27　単純な形状の物体の回転運動

薄い円盤（質量M、半径r）

(2) 糸がすべらず、円盤が
糸と一体となって回転する場合。



$m_2 > m_1$

m_2の下がる加速度を a とする。
（m_1は a で上に加速する。）

$m_2a = m_2g - T_2$　（m_2の運動方程式）

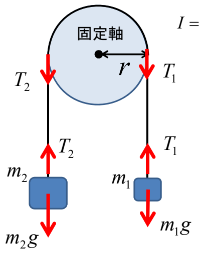
$m_1a = T_1 - m_1g$　（m_1の運動方程式）

円盤の運動方程式

$\dfrac{I}{r}a = (T_2 - T_1)r$　　$\dfrac{I}{r}\dfrac{dv}{dt} = N$

問27　単純な形状の物体の回転運動

薄い円盤（質量M、半径r）



$m_2 > m_1$

$I = \dfrac{1}{2}Mr^2$

$m_2a = m_2g - T_2$

$m_1a = T_1 - m_1g$

$\dfrac{I}{r}a = (T_2 - T_1)r$

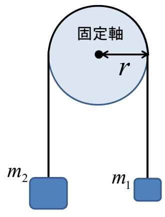
$\Rightarrow$ $a = \dfrac{(m_2-m_1)g}{m_1+m_2+\dfrac{I}{r^2}}$

$\Rightarrow$ $a = \dfrac{(m_2-m_1)g}{m_1+m_2+\dfrac{M}{2}}$

$T_2 = \dfrac{2m_1+M/2}{m_1+m_2+M/2}m_2g$

問27

薄い円盤（質量M、半径r）



$m_2 > m_1$

$I = \dfrac{1}{2}Mr^2$

（円盤固定で糸が滑る場合）

$a = \dfrac{m_2-m_1}{m_1+m_2}g$

$T_2 = \dfrac{2m_1m_2}{m_1+m_2}g$

$a = \dfrac{(m_2-m_1)g}{m_1+m_2+\dfrac{M}{2}}$

$T_2 = \dfrac{2m_1+M/2}{m_1+m_2+M/2}m_2g$

剛体の運動

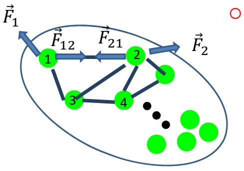
剛体：形の変わらない大きさを持った物体

基準点の運動＋その周りの回転

力のモーメントと剛体のつり合い

重心にとると都合が良い場合が多い。

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} \cdots \\ m_2 \dfrac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_2 + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} \cdots \\ \cdots \end{cases}$$



$$\Rightarrow\ m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} + \cdots = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \cdots$$

$$\Rightarrow\ \frac{M}{M} \cdot \frac{d^2(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots)}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i \quad (M = m_1 + m_2 + \cdots)$$

$$\Rightarrow\ M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i \qquad 重心：\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots}{M}$$

重心にある質量Mの質点に外力の和が作用している運動方程式

問28 斜面を下る円盤　薄い円盤（質量m、半径r）$I = \frac{1}{2}mr^2$

（重心の運動）

$$\boxed{ma = mg\sin\varphi - f}$$

a：加速度 $\left(= \frac{dv}{dt} = \frac{dx^2}{dt^2}\right)$

（回転の運動）

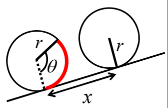
$$I\frac{d\omega}{dt} = N \Rightarrow I\frac{d\omega}{dt} = rf$$

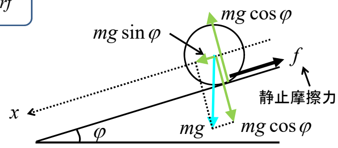
$x = r\theta$ ← すべらず転がる条件

$v = r\omega$ $\left(r\frac{d\omega}{dt} = \frac{dv}{dt}\right)$

$$\Rightarrow \frac{I}{r}\frac{dv}{dt} = rf$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{I}{r}a = rf}$$



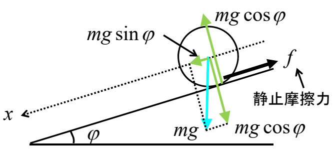


問28 斜面を下る円盤　薄い円盤（質量m、半径r）$I = \frac{1}{2}mr^2$

$$\left.\begin{aligned} ma &= mg\sin\varphi - f \\ \frac{I}{r}a &= rf \end{aligned}\right\} \Rightarrow ma = mg\sin\varphi - \frac{I}{r^2}a$$

$$\Rightarrow a = \frac{mgr^2\sin\varphi}{I + mr^2} \Rightarrow a = \frac{2}{3}g\sin\varphi$$

$$f = \frac{I}{r^2}a = \frac{mr^2}{2r^2}\frac{2}{3}g\sin\varphi = \frac{1}{3}mg\sin\varphi$$

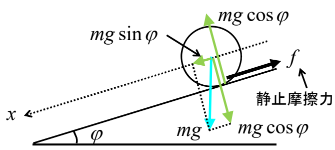


問28 斜面を下る円盤　薄い円盤（質量m、半径r）$I = \frac{1}{2}mr^2$

最大静止摩擦力　$\mu mg\cos\varphi$

$$\mu mg\cos\varphi \geq f \Rightarrow \mu mg\cos\varphi \geq \frac{1}{3}mg\sin\varphi \Rightarrow \mu \geq \frac{\tan\varphi}{3}$$

$$f = \frac{I}{r^2}a = \frac{mr^2}{2r^2}\frac{2}{3}g\sin\varphi = \frac{1}{3}mg\sin\varphi$$



問29　　薄い円盤（質量m、半径r）$I = \frac{1}{2}mr^2$　5・28

$ma = mg - T$　（重心の運動）

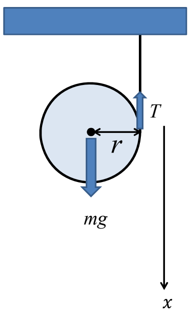
$I\frac{d\omega}{dt} = N$　（回転の運動）

$x = r\theta$
$v = r\omega$ $\left(r\frac{d\omega}{dt} = \frac{dv}{dt} = a\right)$

$$ma = mg - T$$
$$\frac{I}{r}a = rT$$

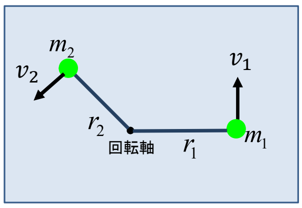
$$ma = mg - T$$
$$\frac{1}{2}mra = rT$$

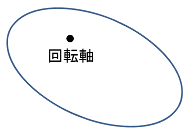
$$\Rightarrow\ a = \frac{2}{3}g, \quad T = \frac{1}{3}mg$$



回転運動の運動エネルギー

$$K = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i(r_i\omega)^2 = \frac{1}{2}\omega^2\sum_{i=1}^{n}m_i r_i^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$





回転運動の運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2$$

問29　　薄い円盤（質量m、半径r）$I=\frac{1}{2}mr^2$

エネルギー保存則

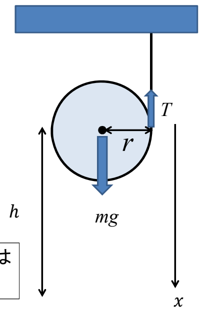
$$mgh=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2$$

$$\begin{cases} v=r\omega \\ I=\frac{1}{2}mr^2 \end{cases}$$

$$mgh=\frac{3}{4}mv^2$$

$$\boxed{v=\sqrt{\frac{4}{3}gh}}$$

自由落下のときは
$\sqrt{2gh}$



問28 斜面を下る円盤　薄い円盤（質量m、半径r）$I=\frac{1}{2}mr^2$

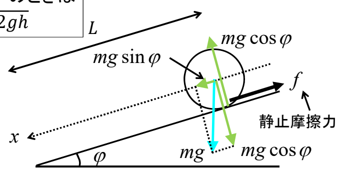
エネルギー保存則

$$mgh=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2 \qquad \begin{cases} v=r\omega \\ I=\frac{1}{2}mr^2 \end{cases}$$

$(mgh=mgL\sin\varphi)$

$$\boxed{v=\sqrt{\frac{4}{3}gh}}$$

自由落下のときは
$\sqrt{2gh}$



回転運動の方程式

回転角	θ	位置	x
角速度	$\omega=\frac{d\theta}{dt}$	速度	$v=\frac{dx}{dt}$
慣性モーメント	$I(=mr^2)$	質量	m
方程式	$I\frac{d^2\theta}{dt^2}=N$	方程式	$m\frac{d^2x}{dt^2}=F$
角運動量	$L=I\omega(=rmv)$	運動量	$p=mv$

回転運動の方程式

回転角　θ

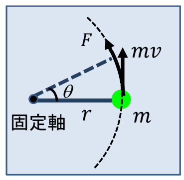
角速度　$\omega=\frac{d\theta}{dt}$

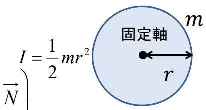
慣性モーメント　$I(=mr^2)$

方程式　$I\frac{d^2\theta}{dt^2}=N$

角運動量　$L=I\omega(=rmv)$

$$\boxed{I\frac{d\omega}{dt}=\frac{dL}{dt}=N} \qquad \left(\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{N}\right)$$





角運動量の保存

$$I\frac{d\omega}{dt}=\boxed{\frac{dL}{dt}=N}$$

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{N}\right)$$

角運動量：　L

角速度：　ω

慣性モーメント：　$I(=mr^2)$

力のモーメント　N　が0ならば

$$I\frac{d\omega}{dt}=\frac{dL}{dt}=0$$

➡ $\boxed{I\omega=L=rmv=一定}$　$(v=r\omega)$

角運動量は保存する。

角運動量の保存

力のモーメント　N　が0ならば

$$I\frac{d\omega}{dt}=\frac{dL}{dt}=0$$

➡ $\boxed{I\omega=L=rmv=一定}$

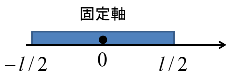
角運動量は保存する。

角運動量の保存

例

フィギュアスケート(腕を縮めると回転が速くなる)

角運動量一定
→回転半径を縮める(慣性モーメントが小さくなる)
→回転速度大きくなる(角速度がω大きくなる)



カのモーメント　N　が0ならば

$$I\frac{d\omega}{dt}=\frac{dL}{dt}=0$$

⇨ $\boxed{I\omega = L = rmv = 一定}$

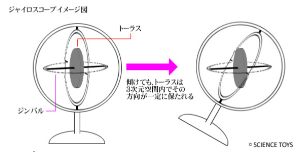
角運動量は保存する。

慣性モーメント　I

$$I=\int_{-l/2}^{l/2}\frac{M}{L}x^2dx=\frac{Ml^2}{12}$$

角運動量の保存

ジャイロスコープ



カのモーメント　N　が0ならば

$$I\frac{d\omega}{dt}=\frac{dL}{dt}=0$$

⇨ $\boxed{I\omega = L = rmv = 一定}$

角運動量は保存する。

角運動量の保存

ケプラーの第2法則:面積速度一定の法則

惑星の運動(万有引力はカのモーメントとして働かない)

速さを v〔m/s〕として

Δt秒間に太陽と惑星の軌道が掃く面積は$\frac{1}{2}rv\Delta t$

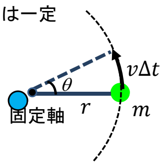
角運動量保存則より面積速度$\frac{1}{2}rv$ (=$\frac{1}{2}rv\Delta t/\Delta t$) は一定

カのモーメント　N　が0ならば

$$I\frac{d\omega}{dt}=\frac{dL}{dt}=0$$

⇨ $\boxed{I\omega = L = rmv = 一定}$

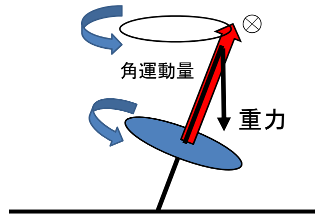
角運動量は保存する。



$$L = rmv$$

歳差運動

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{N}\right)$$



自転車

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{N}\right)$$