

運動量

- 運動の激しさ(勢い)を表す

運動量 = 質量 × 速度 → $p = mv$

速度の向き

→ ベクトル量 → $\vec{p} = m\vec{v}$

単位 kg·m/s

加速運動における運動量の変化

質量 m の物体に一定の力 F を加えて Δt 秒間加速したとき

$$F = ma \rightarrow F = m \frac{dv}{dt} = \frac{dp}{dt} \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} F dt = \int_{p_1}^{p_2} dp$$

運動方程式を書き換えただけ

$$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}$$

$\Delta t = t_2 - t_1$
 $\Delta p = p_2 - p_1$

力積
 $F\Delta t = \Delta p$
 $[\text{N}\cdot\text{s}] = [\text{kg}\cdot\text{m/s}]$

運動量と力積

$$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p} \quad \vec{p} = m\vec{v}$$

同じ力積を得る → 力小さいと時間長い。
力大きいと時間短い。

例

例

- ボールを受け止める $\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}$
- 床に物を落としたとき(エアバッグ) $\vec{p} = m\vec{v}$
- 野球やゴルフのボールを遠くへ飛ばす

例題

速さ3.0m/sで走っている質量2.0kgの台車の後ろを、力100Nで0.1秒間押した。押した直後の台車の速さはいくらか。

力積: $F\Delta t = 100 \times 0.1 = 10 \text{ N}\cdot\text{s}$

$F\Delta t = \Delta p$ より、これが運動量変化。

$\Delta p = m\Delta v$ なので、 $\Delta v = 10/2 = 5.0 \text{ m/s}$

よって $v = 3.0 + 5.0 = 8.0 \text{ m/s}$

$$a = \frac{F}{m} \quad v = v_0 + at = v_0 + \frac{F}{m}t = 3.0 + \frac{100}{2} \times 0.1 = 3.0 + 5.0 = 8.0 \text{ m/s}$$

問18

速さ40m/sで飛んできた質量 0.14 kg のボールをバットで打ち、反対向きに60m/sで打ち返した。ボールがバットから受けた力積はいくらか。(衝突後のボールの向きを正とする)

衝突後のボールの向きを正とすると

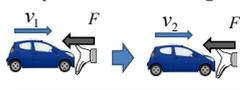
$$F\Delta t = \Delta p = p_2 - p_1 = mv_2 - mv_1$$

$0.14 \times (60 - (-40)) = 14 \text{ N}\cdot\text{s}$

問19
 10(m/s)で走る1000kgの車の持つ運動量は **10000(1.0 × 10⁴)** [kg・m/s]である。この車に後ろ向きに400 Nの力を10 sの間働かせたとき、速度は [m/s]である。車を静止させるにはさらに 秒間この力を加え続けなければならない。

$$\vec{p} = m\vec{v} = 1000\text{kg} \times 10\text{m/s} = 1.0 \times 10^4\text{kg} \cdot \text{m/s}$$

問19
 10(m/s)で走る1000kgの車の持つ運動量は **10000(1.0 × 10⁴)** [kg・m/s]である。この車に後ろ向きに400 Nの力を10 sの間働かせたとき、速度は **6.0** [m/s]である。車を静止させるにはさらに 秒間この力を加え続けなければならない。

$$\vec{p} = m\vec{v} = 1000\text{kg} \times 10\text{m/s} = 1.0 \times 10^4\text{kg} \cdot \text{m/s}$$


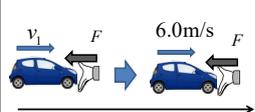
$$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p} = mv_2 - mv_1$$

$$-400 \times 10 = 1000v_2 - 1.0 \times 10^4$$

$$mv_2 = -4000 + 10000 = 6000\text{kg} \cdot \text{m/s}$$

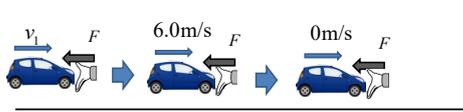
$$v_2 = 6000/1000 = 6\text{m/s}$$

問19
 10(m/s)で走る1000kgの車の持つ運動量は **10000(1.0 × 10⁴)** [kg・m/s]である。この車に後ろ向きに400 Nの力を10 sの間働かせたとき、速度は **6.0** [m/s]である。車を静止させるにはさらに 秒間この力を加え続けなければならない。



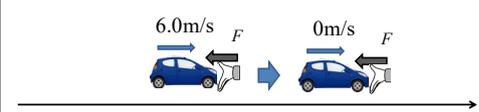
正の方向

問19
 10(m/s)で走る1000kgの車の持つ運動量は **10000(1.0 × 10⁴)** [kg・m/s]である。この車に後ろ向きに400 Nの力を10 sの間働かせたとき、速度は **6.0** [m/s]である。車を静止させるにはさらに 秒間この力を加え続けなければならない。



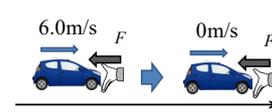
正の方向

問19
 10(m/s)で走る1000kgの車の持つ運動量は **10000(1.0 × 10⁴)** [kg・m/s]である。この車に後ろ向きに400 Nの力を10 sの間働かせたとき、速度は **6.0** [m/s]である。車を静止させるにはさらに 秒間この力を加え続けなければならない。



正の方向

問19
 10(m/s)で走る1000kgの車の持つ運動量は **10000(1.0 × 10⁴)** [kg・m/s]である。この車に後ろ向きに400 Nの力を10 sの間働かせたとき、速度は **6.0** [m/s]である。車を静止させるにはさらに **15** 秒間この力を加え続けなければならない。



$$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p} = mv_2 - mv_1$$

$$-400 \times \Delta t = 1000 \times 0 - 1000 \times 6$$

$$\Delta t = 6000 / 400 = 15\text{s}$$

運動量の保存

$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$

衝突前 質量を m_1, m_2 , 速度を v_1, v_2
 衝突後 質量変化無し, 速度を v_1', v_2'

$-Ft = m_1v_1' - m_1v_1$
 $Ft = m_2v_2' - m_2v_2$

$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$

衝突前後で運動量の和が変化しない
 ↓
 運動量が保存される

衝突 力積
 同じ大きさで互いに反対向きの力積
 運動量 減る 運動量 増す

反発係数(衝突)

反発係数 e
 = 衝突後の速度差 / 衝突前の速度差

ただし, $0 \leq e \leq 1$ $\frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1} = -e$

- 反発係数 = 1 (弾性衝突)
 衝突後の速度差 = 衝突前の速度差
- $0 \leq$ 反発係数 < 1 (非弾性衝突)
- 反発係数 = 0 (完全非弾性衝突)
 衝突後の速度差 = 0
 (衝突後合体, 跳ね返らない)

弾性衝突での運動量の保存

片方の物体を止めておき, 片方を衝突させる. 衝突は弾性衝突 ($e=1$) とすると, 衝突後の速度はそれぞれどうなるか?

$\begin{cases} mv_1 + 0 = mv_1' + mv_2' \\ \frac{v_2' - v_1'}{0 - v_1} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1' = 0 \\ v_2' = v_1 \end{cases}$ $\frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1} = -e$

$m \xrightarrow{v_1} v_1' \quad v_2 = 0 \quad 0 \rightarrow v_2'$

完全非弾性衝突

衝突後合体させると, 衝突後の速度はどうなるか?

$\begin{cases} mv_1 + 0 = mv_1' + mv_2' \\ \frac{v_2' - v_1'}{0 - v_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1' = \frac{v_1}{2} \\ v_2' = \frac{v_1}{2} \end{cases}$

$m \xrightarrow{v_1} \quad m \quad \xrightarrow{v_1/2}$

反発係数や質量が違ってても衝突において運動量は必ず保存される

分裂での運動量の保存

1. 質量の同じ物体を並べておき, バネで他方を押したとき, 2つの物体の速度はどうなるか?

$0 + 0 = mv_1' + mv_2'$
 \downarrow
 $v_1' = -v_2'$

$v_1' \quad m \quad m \quad v_2'$

問20

右方向に速さ v で進んでいる質量 $3m$ の物体1が, 左方向に速さ $v/2$ で進んでいる質量 m の物体2と衝突した. 衝突後の1と2の速さと方向を求めよ. ただし, 反発係数は $1/3$ とする.

$3m \xrightarrow{v} \quad \xleftarrow{v/2} m$

正の方向 \rightarrow

問20

運動量保存則: $3mv - m\frac{v}{2} = 3mv'_1 + mv'_2 \Rightarrow \frac{5}{2}v = 3v'_1 + v'_2$

反発係数: $\frac{v'_1 - v'_2}{v - (-\frac{v}{2})} = -\frac{1}{3} \Rightarrow v'_1 - v'_2 = -\frac{1}{2}v$

$v'_1 = \frac{1}{2}v \quad v'_2 = v$

問21

物体の衝突において、運動量保存の法則が成り立つから

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \quad (1)$$

反発係数から $\frac{v'_B - v'_A}{v_B - v_A} = -e \quad (2)$

この問題における条件を代入して

$$500 \times 10 - 1000 \times 10 = 500v'_A + 1000v'_B \quad (3)$$

$$\frac{v'_B - v'_A}{(-10) - (10)} = -0 \quad (4) \Rightarrow v'_A = v'_B$$

(3)に代入して $v'_A = v'_B = -\frac{10}{3} = -3.3$

両車とも負の向きに3.3 m/sで動く

問22

車の中に乗っている人は車と同じ速度変化を受ける。
よって、人の運動量変化は速度変化により

$$\vec{F}\Delta t = m\Delta\vec{v}$$

人は運動量変化に等しい力積を受ける。

A車の速度変化: $v'_A - v_A = \left(-\frac{10}{3}\right) - 10 = -\frac{40}{3} \text{ m/s}$

B車の速度変化: $v'_B - v_B = \left(-\frac{10}{3}\right) - (-10) = \frac{20}{3} \text{ m/s}$

問22

A車の人の運動量変化 $m\Delta v_A = 50 \times \left(-\frac{40}{3}\right) \text{ [N}\cdot\text{s]}$

B車の人の運動量変化 $m\Delta v_B = 50 \times \left(\frac{20}{3}\right) \text{ [N}\cdot\text{s]}$

$$\left(-\frac{2000}{3}\right) = F_A \times 0.10 \quad F_A = -6.7 \times 10^3 \text{ [N]}$$

$$\left(\frac{1000}{3}\right) = F_B \times 0.10 \quad F_B = 3.3 \times 10^3 \text{ [N]}$$

A車の人の受ける力の方が大きい、A車の乗員の方がダメージを受ける。

運動量保存の法則

平面での衝突では、x, y 方向それぞれの方向で運動量が保存される

	衝突前	衝突後
1	$p_x = P$ $p_y = 0$	p_{1x} p_{1y}
2	0 0	p_{2x} p_{2y}

運動量保存則 $\begin{cases} p_x = p_{1x} + p_{2x} \\ 0 = p_{1y} + p_{2y} \end{cases}$

問23

質量がともにmの2つの小球A, Bがある。静止しているBに対してAを速さvで当てたところ、Aの進んできた向きに対してAは左へ30度、Bは右へ60度の方向へそれぞれ飛んだ。

(1) 衝突後のA, Bの速さをそれぞれ求めよ

(2) 衝突の際にAがBから受けた力積の向きと、大きさをそれぞれ求めよ

問23

質量がともに m の2つの小球A、Bがある。静止しているBに対してAを速さ v で当てたところ、Aの進んできた向きに対してAは左へ30度、Bは右へ60度の方向へそれぞれ飛んだ。

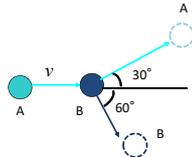
(1) 衝突後のA、Bの速さをそれぞれ求めよ

運動量保存則から

$$mv = mv_A \cos 30^\circ + mv_B \cos 60^\circ$$

$$0 = mv_A \sin 30^\circ - mv_B \sin 60^\circ$$

$$\Rightarrow v_A = \frac{\sqrt{3}}{2}v \quad v_B = \frac{1}{2}v$$



問23

質量がともに m の2つの小球A、Bがある。静止しているBに対してAを速さ v で当てたところ、Aの進んできた向きに対してAは左へ30度、Bは右へ60度の方向へそれぞれ飛んだ。

(2) 衝突の際にAがBから受けた力積の向きと、大きさをそれぞれ求めよ

